Mathématiques - Devoir Surveillé 2
Vendredi 20 novembre 2015 - Durée : 2h00

Exercice 1 Donner toutes les solutions réelles de : $\sqrt{3}\cos(2t) - \sin(2t) = 1$.

Voir la correction du précédent DS.

Exercice 2 Dans cet exercice on s'intéresse aux équations différentielles suivantes :

$$y''(t) - 4y'(t) + y(t) = \cos(t) + 3\sin(t) \tag{1}$$

$$y''(t) - 4y'(t) + y(t) = 0 \tag{2}$$

1. *Un peu de vocabulaire*

   (a) Les équations différentielles (1) et (2) sont des équations du **second** ordre.

   (b) La fonction $f(t) = \cos(t) + 3\sin(t)$ est appelée **second membre**.

   (c) L'équation (2) est appelée **équation homogène** associée à (1).

   (d) Le trinôme du second degré :

   $$X^2 - 4X + 1 = 0 \tag{3}$$

   est appelé **équation caractéristique** associée à (2).

2. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (2).

   On calcule le discriminant de l'équation caractéristique : $\Delta = 12$. L'équation caractéristique admet donc deux racines : $x_1 = 2-\sqrt{3}$ et $x_2 = 2+\sqrt{3}$. D'après le cours, l'ensemble des solutions de (2) est

   $$\mathcal{S}_H = \left\{t \to Ae^{(2+\sqrt{3})t} + Be^{(2-\sqrt{3})t} / (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

3. Déterminer la valeur des constantes A et B pour que $y(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$ soit solution de l'équation différentielle (1).

   On calcule y' et y'' : $y'(t) = -A\sin(t) + B\cos(t)$ et $y''(t) = -A\cos(t) - B\sin(t) = -y(t)$. On remplace dans le membre de droite de (1) :

   $$y''(t) - 4y'(t) + y(t) = -y(t) - 4y'(t) + y(t) = 4A\sin(t) - 4B\cos(t).$$

   On veut que $4A\sin(t) - 4B\cos(t) = \cos(t) + 3\sin(t)$. Par identification, on en déduit que $A = \dfrac{3}{4}$ et $B = -\dfrac{1}{4}$.

4. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1).

   D'après le cours, l'ensemble des solutions de (2) *est*

$$\mathcal{S} = \left\{ t \to \frac{3}{4}\cos(t) - \frac{1}{4}\sin(t) + Ae^{(2+\sqrt{3})t} + Be^{(2-\sqrt{3})t} / (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

5. (a) Déterminer la solution de l'équation (2) qui vérifie $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

   On sait que la solution de (2) *vérifiant de plus* $y(0) = 0$ *et* $y'(0) = 0$ *est unique. On vérifie très facilement que la fonction nulle* $t \to 0$ *est solution.*

   (b) Déterminer la solution de l'équation (1) qui vérifie $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

   D'après la question 4., les solutions de (1) *sont de la forme :*

$$y(t) = \frac{3}{4}\cos(t) - \frac{1}{4}\sin(t) + Ae^{(2+\sqrt{3})t} + Be^{(2-\sqrt{3})t}.$$

   Calculons y' *:*

$$y'(t) = -\frac{3}{4}\sin(t) - \frac{1}{4}\cos(t) + (2+\sqrt{3})Ae^{(2+\sqrt{3})t} + (2-\sqrt{3})Be^{(2-\sqrt{3})t}.$$

   Les conditions $y(0) = 0$ *et* $y'(0) = 0$ *conduisent au système suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{3}{4} + A + B & = & 0 \\ -\frac{1}{4} + (2+\sqrt{3})A + (2-\sqrt{3})B & = & 0 \end{array} \right.$$

   On en déduit $A = \dfrac{7\sqrt{3}-9}{24}$ *et* $B = \dfrac{-7\sqrt{3}-9}{24}$. *L'unique solution de de* (1) *vérifiant de plus* $y(0) = 0$ *et* $y'(0) = 0$ *est*

$$y(t) = \frac{3}{4}\cos(t) - \frac{1}{4}\sin(t) + \frac{7\sqrt{3}-9}{24}e^{(2+\sqrt{3})t} + \frac{-7\sqrt{3}-9}{24}e^{(2-\sqrt{3})t}.$$

Exercice 3

1. On considère la fonction $f(x) = -\dfrac{2x\ln(x)}{1+x^2}$.

   (a) La dérivée de la fonction f est-elle (toute réponse non justifiée ne rapporte pas de point) :

      i. $\dfrac{4x\ln(x)}{(1+x^2)^2} - \dfrac{2}{x(1+x^2)}$?

      ii. $\dfrac{2(x^2-1)\ln(x)}{(1+x^2)^2} - \dfrac{2}{1+x^2}$?

iii. $\dfrac{2(\ln(x)+1)}{(1+x^2)^2}$?

Montrons que la bonne réponse est la réponse ii. On note $u(x) = -2x\ln(x)$ et $v(x) = 1+x^2$. On a $u'(x) = -2(\ln(x)+1)$ et $v(x) = 2x$. On en déduit que

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \frac{-2(\ln(x)+1)(1+x^2) + 2x\ln(x)\times 2x}{(1+x^2)^2}$$
$$= \frac{2(x^2-1)\ln(x) - 2(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2(x^2-1)\ln(x)}{(1+x^2)^2} - \frac{2}{1+x^2}$$

(b) La fonction f est-elle solution de l'équation différentielle :

$$(1+x^2)y'(x) + \frac{x^2-1}{x}y(x) = -2 \text{ ?}$$

Par le calcul, on montre que $(1+x^2)f'(x) + \dfrac{x^2-1}{x}f(x)$ est égal à -2. Donc f est solution de l'équation différentielle.

2. On rappelle qu'une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ est $\ln|u|$.

(a) Déterminer une primitive de $\dfrac{1}{x\ln(x)}$.

On note $u(x) = \ln(x)$. On a $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{x\ln(x)} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ Une primitive de $\dfrac{1}{x\ln(x)}$ est donc $\ln(|\ln(x)|)$.

(b) En déduire la forme des solutions de l'équation différentielle sur $]1, +\infty[$:

$$\ln(x)y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = 0. \tag{4}$$

En divisant l'équation (4) par $\ln(x)$, on obtient :

$$y'(x) + \frac{1}{x\ln(x)}y(x) = 0. \tag{5}$$

D'après la question 2., une primitive de $\dfrac{1}{x\ln(x)}$ est $\ln(|\ln(x)|)$. On en déduit que l'ensemble des solutions sur $]1, +\infty[$ est

$$\mathcal{S} = \left\{ x \to Ae^{-\ln(\ln(x))} = Ae^{\ln(1/\ln(x))} = \frac{A}{\ln(x)} / A \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 4

1. Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle :

(a) $z_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$,

On note $z_1' = 1 + i\sqrt{3}$ *et* $\theta_1' = \arg(z_1')$. *On a* $|z_1'| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ *et*

$$\begin{cases} \cos(\theta_1') &= \dfrac{1}{2} \\ \sin(\theta_1') &= \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

On en déduit $\theta_1' = \dfrac{\pi}{3}$ *puis* $z_1' = 2e^{i\pi/3}$.

On note $z_1'' = \sqrt{3} - i$ *et* $\theta_1'' = \arg(z_1'')$. *On a* $|z_1''| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ *et*

$$\begin{cases} \cos(\theta_1'') &= \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta_1'') &= \dfrac{-\sqrt{1}}{2} \end{cases}$$

On en déduit $\theta_1'' = -\dfrac{\pi}{6}$ *puis* $z_1'' = 2e^{-i\pi/6}$.

Enfin

$$z_1 = \frac{z_1'}{z_1''} = \frac{2e^{i\pi/3}}{2e^{-i\pi/6}} = e^{i(\pi/3+\pi/6)} = e^{i\pi/2} = i.$$

(b) $z_2 = -\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$,

On a $-1 = e^{i\pi}$, *d'où* $z_2 = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}e^{i\pi} = \sqrt{2}e^{i(-\pi/4+\pi)} = \sqrt{2}e^{3i\pi/4} = -1 + i$.

(c) $z_3 = \dfrac{1}{1+i} + \dfrac{1}{1-i}$,

On a $z_3 = \dfrac{1-i}{(1+i)(1-i)} + \dfrac{1+i}{(1-i)(1+2)} = \dfrac{2}{2} = 1 = e^{i0}$.

(d) $z_4 = i\dfrac{(1+i)^8}{8}$,

On note $z_4' = 1 + i$ *et* $\theta_4' = \arg(z_4')$.*On a* $|z_1'| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ *et*

$$\begin{cases} \cos(\theta_4') &= \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta_4') &= \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

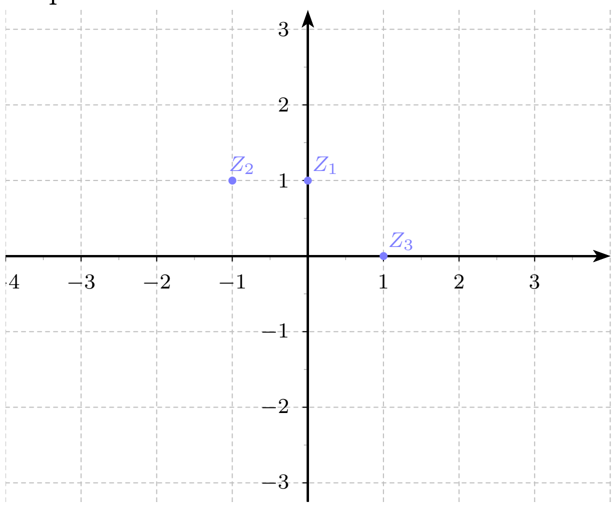
On en déduit $\theta_4' = \dfrac{\pi}{4}$ *puis* $z_1' = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$. *D'où* $z_4 = i\dfrac{(\sqrt{2}e^{i\pi/4})^8}{8} = i\dfrac{(\sqrt{2})^8 e^{8i\pi/4}}{8} = 2ie^{i0}$.

(e) $z_5 = \dfrac{\sin(x) + i\cos(x)}{2(\cos(x) - i\sin(x))}$, avec $x \in \mathbb{R}$.

On a

$$z_5 = \frac{i(-i\sin(x) + \cos(x))}{2(\cos(x) - i\sin(x))} = i = e^{i\pi/2}.$$

2. Placer le plus précisément possible sur le graphique ci-dessous les points d'affixes z_1, z_2 et z_3 de la question 1.



Exercice 5 Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Montrer que $z \in \mathbb{C}$ est réel si et seulement si $z = \overline{z}$.

   Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On a $\overline{z} = a - ib$, d'où

$$z = \overline{z} \Leftrightarrow a + ib = a - ib \Leftrightarrow 2ib = 0 \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}.$$

2. Montrer que $z \in \mathbb{C}$ est imaginaire pur si et seulement si $z = -\overline{z}$.

   Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On a $\overline{z} = a - ib$, d'où

$$z = -\overline{z} \Leftrightarrow a + ib = -(a - ib) \Leftrightarrow 2a = 0 \Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow z \text{ est imaginaire pur.}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser les expressions suivantes :
   (a) $\cos(5x)\cos(7x)$.

   On a :

$$\begin{aligned}\cos(5x)\cos(7x) &= \left(\frac{e^{5ix}+e^{-5ix}}{2}\right)\left(\frac{e^{7ix}+e^{-7ix}}{2}\right) = \frac{e^{12ix}+e^{-2ix}+e^{2ix}+e^{-12ix}}{4}\\ &= \frac{e^{12ix}+e^{-12ix}+e^{2ix}+e^{-2ix}}{4} = \frac{\cos(12x)}{2}+\frac{\cos(2x)}{2}.\end{aligned}$$

   (b) $\cos^3(x)\sin^2(x)$,

   On a :

$$\begin{aligned}\cos^3(x)\sin^2(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2\\ &= \frac{e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}}{8}\times\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}-2}{-4}\\ &= -\frac{e^{5ix}+e^{ix}-2e^{3ix}+3e^{3ix}+3e^{-ix}-6e^{ix}+3e^{ix}+3e^{-3ix}-6e^{-ix}+e^{-ix}+e^{-5ix}-2e^{-3ix}}{32}\\ &= \frac{-\cos(5x)-\cos(3x)+2\cos(x)}{16}.\end{aligned}$$