Nom : Prénom : Groupe :

Mathématiques - Devoir Surveillé 2
Correction

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1

1. Donner la mesure principale des angles suivants :
   (a) $\frac{116\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$
   (b) $\frac{2018\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}[2\pi]$
2. Écrire la condition suivante en utilisant une valeur absolue : $-2 < x < 3$

   $-2 < x < 3 \Leftrightarrow |x - 0.5| < 2.5$

Exercice 2

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. On considère le système :

$$(1) \begin{cases} 2y'(t) - y(t) = 3t + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(a) Ecrire puis résoudre l'équation homogène associée à l'équation différentielle du système (1).

L'équation homogène est $2y'(t) - y(t) = 0$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène est :

$$\mathcal{S}_H = \{Ke^{t/2} / K \in \mathbb{R}\}$$

(b) Déterminer la ou les solutions du système (1).

Déterminons une solution particulière $y_p(t)$ de l'équation différentielle $2y'(t) - y(t) = 3t + 1$. On cherche y_p sous la forme d'un polynôme de degré 1 puisque le second membre $3t + 1$ est un polynôme de degré 1 : $y_p(t) = at + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ à déterminer. On a $y_p'(t) = a$. En remplaçant dans l'équation, on obtient :

$$2y_p'(t) - y_p(t) = 2a - (at + b) = -at + 2a - b$$

Pour que y_p soit solution, il faut que $-at + 2a - b = 3t + 1$. Par identification, on en déduit que $a = -3$ et $2a - b = 1$, d'où $a = -3$ et $b = -7$. On a donc $y_p(t) = -3t - 7$.
D'après le cours l'ensemble des solutions de l'équation $2y'(t) - y(t) = 3t + 1$ est :

$$\mathcal{S} = \{Ke^{t/2} - 3t - 7 / K \in \mathbb{R}\}$$

Soit $y(t) = Ke^{t/2} - 3t - 7 \in \mathcal{S}$ avec $K \in \mathbb{R}$. La condition initiale $y(0) = 1$ va nous permettre de déterminer la constante K :

$$y(0) = 1 \Leftrightarrow K - 7 = 1 \Leftrightarrow K = 8$$

2. Déterminer une équation différentielle vérifiée par la fonction $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

   On a $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$. On a que $xf'(x) - \dfrac{1}{x+1}f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{x+1} \times \dfrac{x}{x+1} = 0$.
   La fonction f est par exemple solution de l'équation différentielle

$$xy'(x) - \frac{1}{x+1}y(x) = 0$$

   Il en existe une infinité d'autres !

3. La fonction $g(x) = 1 + e^x$ est-elle solution du système suivant :

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{e^x}{e^x+1}y(x) - y'(x) = 0 \\ y(0) = 1 \end{array} \right.$$

   Non car la fonction g ne vérifie pas la condition initiale : $g(0) = 2$.

Exercice 3 Les questions suivantes sont indépendantes.

1. On considère la fonction $f(x) = \sqrt{3}\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) + \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$

   (a) Mettre f sous la forme $A\sin\left(\dfrac{x}{2} + \varphi\right)$ avec $A > 0$.

   D'après le cours, on a $A = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$ et

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(\varphi) = \dfrac{1}{2} \\ \sin(\varphi) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$$

   D'où $f(x) = 2\sin\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{3}\right)$

   (b) Résoudre l'équation $f(x) = \sqrt{2}$. Donner les solutions sur $\mathbb{R}$ puis les solutions appartenant à l'intervalle $[-5\pi; \pi]$ On résout :

$$f(x) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

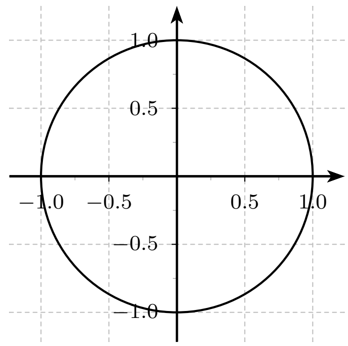
   c'est-à-dire :
   $\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{4}\,[2\pi] \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{6}\,[4\pi]$ ou $\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{3\pi}{4}\,[2\pi] \Leftrightarrow x = \dfrac{5\pi}{6}\,[4\pi]$.
   L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{5\pi}{6} + 4k\pi, -\frac{\pi}{6} + 4k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

   Les solutions appartenant à l'intervalle $[-5\pi; \pi]$ sont

$$\left\{-\frac{25\pi}{6}, -\frac{19\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$$

2. (a) Représenter le plus précisément possible, sur le cercle trigonométrique ci-dessous, les solutions du système : $\begin{cases} \cos(x) & < & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ |\sin(x)| & \geq & \dfrac{1}{2} \end{cases}$



(b) Donner sous forme d'intervalle les solutions appartenant à $[0, 2\pi]$.

Les solutions appartenant à $[0, 2\pi]$ sont $\left]\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{7\pi}{6}; \dfrac{11\pi}{6}\right]$

3. Montrer que $\cos(x + \pi) - \cos(x + \pi/2) - \cos(x - \pi) = \sin(x)$.

On a $\cos(x + \pi) = \cos(x - \pi)$ et $\cos(x + \pi/2) = -\sin(x)$ d'où le résultat.

4. (a) Montrer que $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$

$\cos(x + x) = \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$

(b) Donner la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

On a $2 \times \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{6}$, d'où

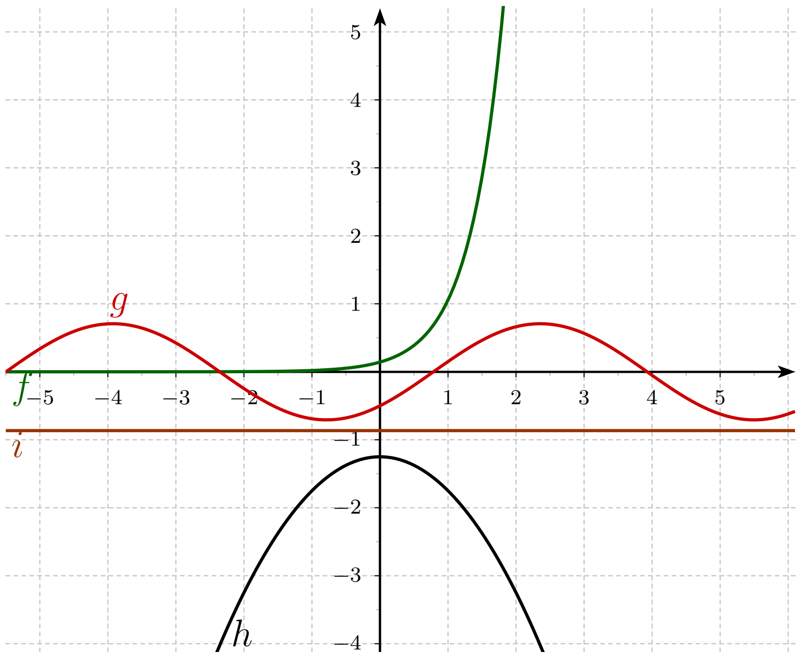
$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) - 1 \Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + 1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \pm\sqrt{\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + 1}{2}}$$

Or $\dfrac{\pi}{12} \in]0; \pi[$ donc $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) > 0$. On en déduit que $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2} + 1}{2}}$

Exercice 4 On considère les équations différentielles suivantes :

1. $y'(t) - 5y(t) = 2t^2 - t + 5 - y(t)$
2. $\dfrac{du}{dt}(t) - u(t) = \cos(t)$
3. $y'(t) - e = \pi y(t)$
4. $-2y'(x) + 3y(x) = e^{2x}$

On a représenté sur le graphique ci-dessous une solution particulière pour chacune des équations différentielles 1. 2. 3. et 4. ci-dessus.



On cherches les solutions particulières sous la forme du second membre.

- La courbe f est une solution particulière de l'équation différentielle 4
- La courbe g est une solution particulière de l'équation différentielle 2
- La courbe h est une solution particulière de l'équation différentielle 1
- La courbe i est une solution particulière de l'équation différentielle 3