Nom : Prénom : Groupe :

Mathématiques - Devoir Surveillé 2
Vendredi 8 novembre 2019 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? **Justifier soigneusement** les réponses.

1. $\forall t \in \mathbb{R},\ \sqrt{3}\cos(\pi t) - \sin(\pi t) = 2\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$

   FAUX. Si l'assertion était vraie, pour $t = 0$, on obtiendrait $\sqrt{3} = 1$, ce qui est absurde !

2. $\forall t \in \mathbb{R},\ \sqrt{3}\cos(\pi t) - \sin(\pi t) = 2\sin\left(\pi t + \frac{2\pi}{3}\right)$

   VRAI. On veut écrire $\sqrt{3}\cos(\pi t) - \sin(\pi t)$ sous la forme $A\sin(\pi t + \varphi)$. On applique la formule du cours : $A = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$ et

   $$\begin{cases} \cos(\varphi) = -\dfrac{1}{2} \\ \sin(\varphi) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

   d'où $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ et $\sqrt{3}\cos(\pi t) - \sin(\pi t) = 2\sin\left(\pi t + \frac{2\pi}{3}\right)$

3. $\forall t \in \mathbb{R},\ \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) = 1$

   VRAI. On sait que $\forall t \in \mathbb{R},\ \sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$.

4. $\forall t \in \mathbb{R}$,

   $$\sum_{k=1}^{2} (-1)^k \cos\left(\frac{k\pi}{2} - t\right) \times \cos\left(\frac{k\pi}{2} + t\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) - \cos(\pi - t) \times \cos(\pi + t)$$

   FAUX. On a

   $$\sum_{k=1}^{2} (-1)^k \cos\left(\frac{k\pi}{2} - t\right) \times \cos\left(\frac{k\pi}{2} + t\right) = \cos(\pi - t) \times \cos(\pi + t) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right)$$

Exercice 2

1. Déterminer la mesure principale des angles suivants.

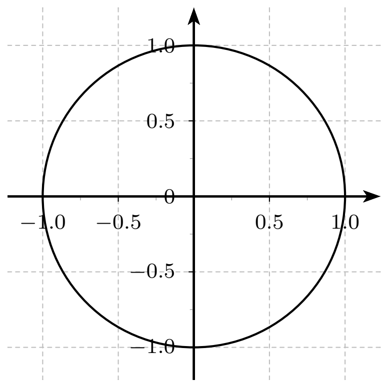
(a) $\dfrac{23\pi}{6} = \dfrac{24\pi}{6} - \dfrac{\pi}{6} = 4\pi - \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\pi}{6}\,[2\pi]$

(b) $\dfrac{2019\pi}{6} = \dfrac{2016\pi}{6} + \dfrac{3\pi}{6} = 336\pi + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$

(c) $\dfrac{8\pi}{3} = \dfrac{6\pi}{3} + \dfrac{2\pi}{3} = 2\pi + \dfrac{2\pi}{3}\,[2\pi]$

(d) $\dfrac{33\pi}{3} = 11\pi = \pi\,[2\pi]$

2. Placer très précisément les angles de la question précédente sur le cercle trigonométrique ci-dessous.



3. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

On a $\dfrac{1}{2} = \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

D'où :

$$2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 2x = 2k\pi \text{ ou } 2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Les solutions réelles sont

$$\mathcal{S} = \left\{k\pi; \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

(b) Déterminer les solutions appartenant à l'intervalle $[0, 2\pi]$

Les solutions dans $[0; 2\pi]$ sont

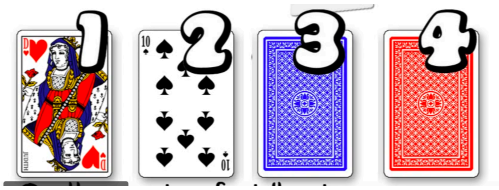
$$\mathcal{S} = \left\{0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, 2\pi\right\}$$

Exercice 3

On dispose d'un jeu de cartes dont on ne connait pas la composition. On fait l'hypothèse suivante :

"Si une carte a une dame d'un côté, alors l'autre côté est bleu"

Quelle(s) carte(s) faut-il retourner ci-dessous pour confirmer ou infirmer cette hypothèse ? Justifier soigneusement votre réponse.



Cliquez sur le lien suivant pour aller voir la vidéo.

Exercice 4 Déterminer (justifier soigneusement vos réponses) :

1. $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$
2. $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$
3. $\arctan\left(\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) = \arctan\left(\tan\left(\frac{7\pi}{6} - \pi\right)\right) = \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{6}$
4. $\tan\left(\arctan\left(10^{-6}\right)\right) = 10^{-6}$
5. $\lim_{t\to+\infty} \arctan(t) + \arctan(-t) = 0$

Exercice 5 Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses en justifiant :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| \neq \sqrt{3} \Rightarrow x \neq \sqrt{3}$
   VRAI car la contraposée est vraie : $\forall x \in \mathbb{R},\ x = \sqrt{3} \Rightarrow |x| = \sqrt{3}$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = \sqrt{3} \Rightarrow x = \sqrt{3}$
   FAUX car x peut aussi être égale à $-\sqrt{3}$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq \sqrt{3} \Rightarrow |x| \neq \sqrt{3}$
   FAUX car la contraposée est fausse (c'est l'assertion précédente)

Exercice 6

1. Déterminer une équation différentielle dont la fonction $f(x) = \cos(\pi x)$ est solution.
   On a $f'(x) = -\pi\sin(\pi x)$ et $f''(x) = -\pi^2\cos(\pi x)$. D'où $f''(x) + \pi^2 f(x) = 0$. La fonction f est solution de l'équation différentielle :
   $$y''(x) + \pi^2 y(x) = 0$$
2. La fonction $f(x) = -\frac{5}{3}x - \frac{20}{9}$ est-elle solution de l'équation différentielle ci-dessous ?
   $$4y' - 3y = 5x$$
   On a $f'(x) = -\frac{5}{3}$, d'où
   $$4f'(x) - 3f(x) = 4 \times \left(-\frac{5}{3}\right) - 3 \times \left(-\frac{5}{3}x - \frac{20}{9}\right) = 5x$$
   On en déduit que f est solution de l'équation différentielle.

3. La fonction $f(x) = \ln(1+x)e^{-x}$ est-elle solution de l'équation différentielle ci-dessous ?

$$y' + y = \frac{1}{e^x + 1}$$

On a $f'(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+x} - \ln(1+x)e^{-x}$ d'où

$$f'(x) + f(x) = \frac{e^{-x}}{1+x} -$$

On en déduit que f n'est pas solution de l'équation différentielle.

4. On considère le système suivant :

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} 4y' - 2y - 1 = 5t + y - 1 \\ y(0) = 2 \end{array} \right.$$

(a) Quel est le second membre dans le système $(*)$?

Le second membre est $f(t) = 5t$

(b) Quelle est l'équation homogène associée au système $(*)$?

L'équation homogène est

$$4y' - 3y = 0$$

(c) Résoudre le système $(*)$.

Les solutions de l'équation homogène sont $\mathcal{S}_H = \{Ce^{3/4t} / C \in \mathbb{R}\}$.

On a $4y' - 2y - 1 = 5t + y - 1 \Leftrightarrow 4y' - 3y = 5t$. On a vu à la question 2) qu'une solution particulière de cette équation est $y_p(t) = -\dfrac{5}{3}t - \dfrac{20}{9}$.

L'ensemble des solutions de $4y' - 3y = 5t$ est $\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_H$.

Soit $y \in \mathcal{S}$: $y(t) = Ce^{3/4t} - \dfrac{5}{3}t - \dfrac{20}{9}$. On a

$$y(0) = 2 \Leftrightarrow C - \frac{20}{9} = 2 \Leftrightarrow C = \frac{38}{9}$$

L'unique solution du système est $\dfrac{38}{9}e^{3/4t} - \dfrac{5}{3}x - \dfrac{20}{9}$