

Mathématiques - Devoir Surveillé 1

Vendredi 19 novembre 2021 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 (15 minutes)

Répondre par **Vrai** ou **Faux** en justifiant (toute réponse non justifiée ne rapporte rien).

1. $\frac{2 - 2^{-2}}{2 + 2^{-2}} = \frac{7}{9}$

2. Si $\sqrt{50} - \sqrt{8} = \sqrt{x}$ alors $x = 18$

3. Soient a et b deux réels. Si $a \neq 0$ et $a + b = 0$ alors $\frac{b^{2021}}{a^{2021}} = 1$

4. Soient a et b deux réels. $ab \leq 0 \Rightarrow a \leq 0$ et $b \geq 0$.

Exercice 2 (15 minutes)

1. Soit la propriété $P_1 : \forall x \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{N}$ tel que $x^2 > b$.

(a) Dire si la propriété P_1 est vraie ou fausse.

(b) Écrire la négation de P_1 .

(c) La propriété non- P_1 est-elle vraie ou fausse ?

2. Dire si la propriété P_2 est vraie ou fausse :

$$P_2 : \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists z \in [0; +\infty[\text{ tel que } (x + y)^2 = x^2 + y^2 + z$$

3. Donner un exemple de fonction qui vérifie la propriété $P_3 : \exists m \in [0; +\infty[$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) > m$

Exercice 3 (10 minutes)

1. Écrire les sommes suivantes en utilisant le signe Sigma :

(a) $S_1 = 16 + 25 + 36 + \dots + 400$

(c) $S_3 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 + \dots + 171 - 172 + 173$

(b) $S_2 = \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \dots + \frac{31}{32}$

2. Donner la valeur exacte des deux sommes suivantes :

(a) $S_4 = \sum_{k=2}^5 k \times (k + 1)$

(b) $S_5 = \sum_{n=0}^{12} 17$

Exercice 4 (10 minutes)

1. Donner la mesure principale de chacun des angles suivants

(a) $\theta_1 = \frac{11\pi}{6}$

(b) $\theta_2 = \frac{31\pi}{2}$

(c) $\theta_3 = -\frac{49\pi}{17}$

(d) $\theta_4 = \frac{2677\pi}{4}$

2. Donner les valeurs de

$$(a) \arctan(-1) \qquad (c) \arctan\left(\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) \qquad (e) \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$$

$$(b) \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \qquad (d) \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

Exercice 5 (25 minutes)

- Donner la liste des réels $x \in]-\pi; \pi]$ qui vérifie $x = \frac{5\pi}{6} + k \times \frac{\pi}{3}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
- Résoudre sur $[0; 2\pi[$ l'équation $\sin(3x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.
- Résoudre sur $[0; 2\pi[$ l'équation $\sin(2x) = \cos(x)$.
- Dire si les propriétés suivantes sont vraies pour tout $x \in \mathbb{R}$:
 - $\sin(x + 31\pi) = -\sin(x)$
 - $\cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = -\sin(x)$
 - $\sin(2x) \cos(2x) = \sin(4x)$

Exercice 6 (15 minutes)

- Is the function $f(t) = e^{-3t} + e^{2t}$ a solution of the differential equation $\frac{dy}{dt}(t) + 3y(t) = 5e^{2t}$?
- Is the function $f(t) = \frac{1}{4}t^2 + \frac{3}{8}$ a solution of the differential equation : $y''(t) - 4y(t) = t^2 + 1$?
- For each differential equation below, indicate the order and if it is linear, homogenous or has constant coefficients.
 - $y'(t) + 3ty(t) = 0$
 - $y'(t) \times y(t) = 2$
 - $y''(t) - 3y'(t) + y(t) = 2t + 1$
- Solve the differential equation : $y'(t) - 3y(t) = 0$.