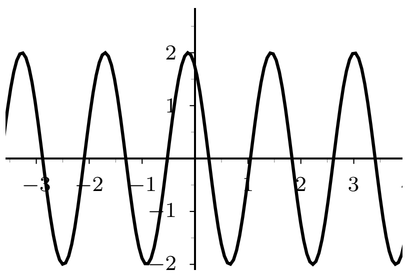
Mathématiques - Correction devoir Surveillé 3
Vendredi 18 décembre 2015 - Durée : 2h00

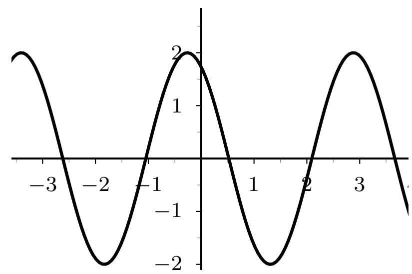
Exercice 1 Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \sqrt{3}\cos(2t) - \sin(2t)$.

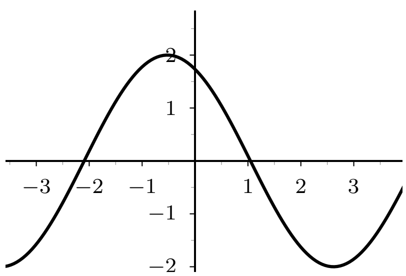
1. Écrire f sous la forme $f(t) = A\cos(\omega t - \phi)$.

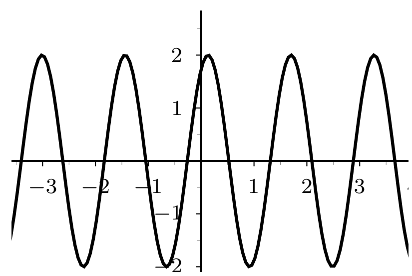
   D'après le cours, on a $\omega = 2$, $A = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$ et ϕ est défini par
   $$\begin{cases} \cos(\phi) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\phi) = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$$
   On en déduit que $\phi = -\dfrac{\pi}{6}$ et $f(t) = 2\cos\left(2t + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

2. Parmi les courbes suivantes, dire celle qui est la représentation graphique de f, en justifiant.

(a) 

(c) 

(b) 

(d) 

   La courbe de f est la courbe (c). En effet la courbe de f est en avance par rapport à la courbe de cosinus. De plus, il y a une dilatation du temps de facteur 2, la fonction f oscille donc $2\times$ plus vite que la fonction cosinus.

Exercice 2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, si possible :

   (a) $\mid -2x+1 \mid = 0 \Leftrightarrow -2x+1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

   (b) $\mid -2x+1 \mid = -4$ est impossible car la fonction valeur absolue ne prend que des valeurs positives.

   (c) $\mid -2x+1 \mid = 4 \Leftrightarrow \mid 2x-1 \mid = 4 \Leftrightarrow 2x-1 = 4$ ou $-(2x-1) = 4 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$ ou $x = \dfrac{5}{2}$.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{R}$, si possible, en fonction des valeurs de a :
   Si $a < 0$, $\mid ax + 1 \mid = 2a$ est impossible car une valeur absolue est toujours positive.
   Si $a = 0$, $\mid ax + 1 \mid = 2a \Leftrightarrow 1 = 0$! Ceci est impossible.
   Supposons maintenant que $a \neq 0$.

$$\begin{aligned} \mid ax + 1 \mid = 2a &\Leftrightarrow ax + 1 = 2a \text{ ou } -(ax+1) = 2a \\ &\Leftrightarrow x = \frac{(2a-1)}{a} \text{ ou } x = -\frac{(2a+1)}{a} \end{aligned}$$

Exercice 3

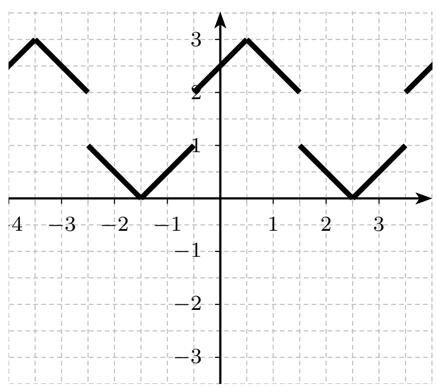
1. Déterminer la parité des fonctions suivantes :
   (a) $f(x) = \cos(\sin(x))$
   La fonction f est paire car

$$f(-x) = \cos(\sin(-x)) = \cos(-\sin(x)) = \cos(\sin(x)) = f(x).$$

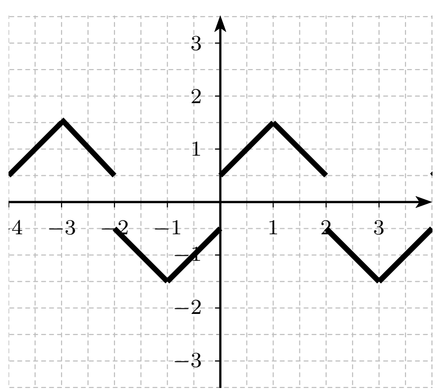
   Nous avons utilisé le fait que la fonction cosinus est paire et que la fonction sinus est impaire.
   (b) $g(x) = x^3\, h(x) - x$, avec h est une fonction paire.
   Les fonctions $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x$ sont impaires. Montrons que la fonction g est impaire :

$$g(-x) = (-x)^3\, h(-x) - (-x) = -x^3 h(x) + x = -(x^3\, h(x) - x) = -g(x).$$

2. h est une fonction périodique de période 4 dont la courbe est :



   Déterminer les valeurs de a et b telles que $k(t) = h(t + a) + b$ soit une fonction impaire.
   La fonction $k(t) = h\left(t - \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2}$ convient. Le courbe de k est alors :

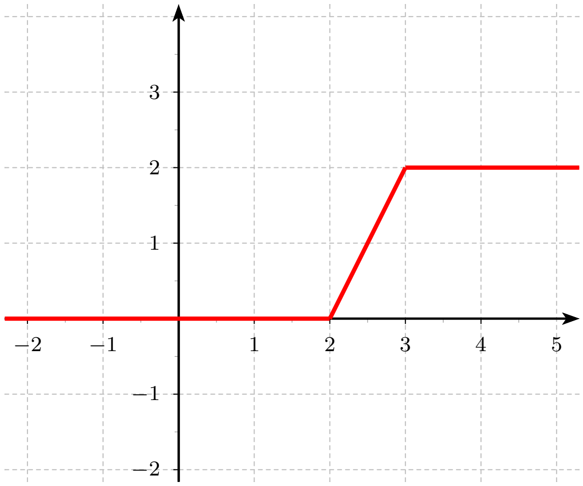


Exercice 4 Tracer les représentations graphiques des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 2(x-2)\mathcal{U}(x-2) + (6-2x)\mathcal{U}(x-3)$

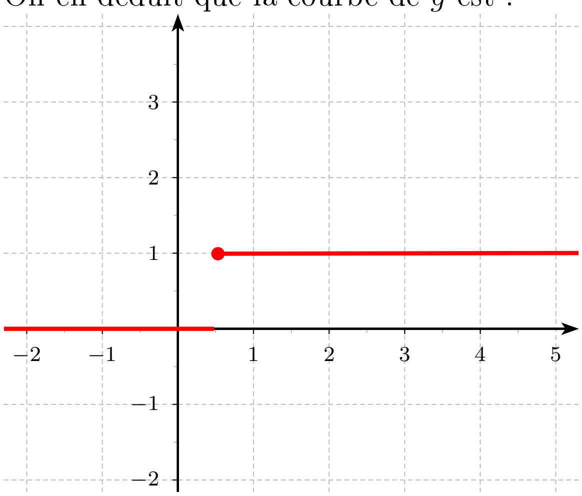
	$-\infty$	2		3	$+\infty$
$2(x-2)\mathcal{U}(x-2)$	0	0	$2(x-2)$	2	$2(x-2)$
$(6-2x)\mathcal{U}(x-3)$	0	0	0	0	$6-2x$
f(x)	0	0	$2(x-2)$	2	2

On en déduit que la courbe de f est :



2. $g(x) = \mathcal{U}(2x-1) = \begin{cases} 1 \text{ si } 2x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{1}{2} \\ 0 \text{ si } 2x-1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{1}{2} \end{cases}$

On en déduit que la courbe de g est :



Exercice 5 On considère les fonctions $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x-3$ et $h(x) = -x+1$.

1. Décomposer u en utilisant uniquement les fonctions f, g et h.

   (a) $u(x) = -2x^2 + 4 = h \circ g \circ f(x)$

   (b) $u(x) = (2x^2-3)^2 = f \circ g \circ f(x)$

2. Déterminer $g \circ g \circ g$.

$$g \circ g \circ g(x) = g \circ g(2x-3) = g(2(2x-3)-3) = g(4x-9) = 2(4x-9) - 3 = 8x - 21$$

3. Déterminer une fonction v telle que $g \circ v(x) = x$.

   La fonction $v(x) = \dfrac{1}{2}(x+3)$ convient.

Exercice 6

1. Déterminer les solutions de l'équation :

$$\delta^2 = 8 + 6i. \tag{1}$$

D'après le cours, cela conduit au système suivant :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 8 & (1) \\ 2ab = 6 & (2) \\ a^2 + b^2 = 10 & (3) \end{cases}$$

On a

$$(1) + (2) \Rightarrow 2a^2 = 18 \Rightarrow a = \pm 3,$$
$$(2) - (1) \Rightarrow 2b^2 = 2 \Rightarrow b = \pm 1.$$

D'après (2), a et b sont de même signe. On en déduit que les solutions de (1) sont :

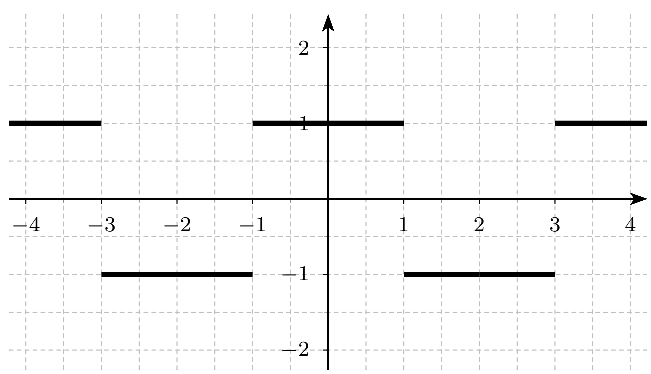
$$\mathcal{S} = \{\pm(3+i)\}.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2 + (1-3i)Z - (4+3i) = 0$.
On calcule le discriminant $\Delta = (1-3i)^2 - 4\times 1 \times (-(4+3i)) = 1 - 9 - 6i + 16 + 12i = 8 + 6i$.
D'après la question précédente, les racines de Δ sont $\pm(3+i)$. On en déduit que les solutions de l'équation sont :

$$Z_1 = \frac{-(1-3i)+3+i}{2} = \frac{2+4i}{2} = 1+2i \text{ et } Z_2 = \frac{-(1-3i)-3-i}{2} = \frac{-4+2i}{2} = -2+i.$$

Exercice 7 Est-il possible de tracer les fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$? Si oui, les dessiner sur 3 périodes. Si non, expliquez pourquoi.

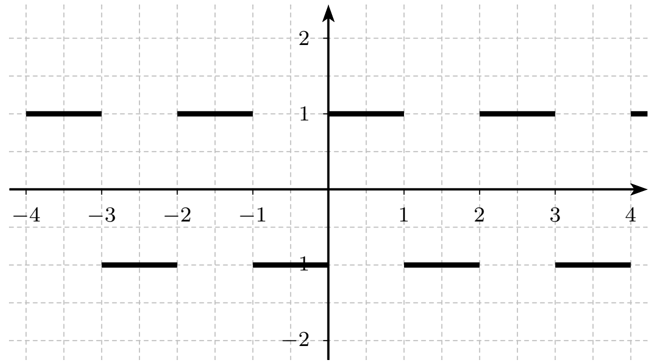
1.
- f_1 est paire,
- f_1 est périodique de période 4,
- $f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -1 & \text{si } 1 \leq x < 2 \end{cases}$



2.
- f_2 est paire,
- f_2 est périodique de période 2,
- $f_2(x) = 1$ si $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$

Il n'est pas possible de tracer cette fonction car nous ne l'avons que sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ qui est de longueur 1, ce qui correspond à une demi-période pour une fonction périodique de période 2. En effet, la parité ne nous permet pas d'obtenir la fonction sur une période entière (c'est-à-dire sur un intervalle de longueur 2) puisque l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ est déjà symétrique par rapport à 0.

3.
- f_3 est impaire,
- f_3 est périodique de période 4,
- $f_3(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -1 & \text{si } 1 \leq x < 2 \end{cases}$



Exercice 8 Calculer les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{x}$

   On revient à la définition de nombre dérivé en 0 pour la fonction cosinus :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - \cos(0)}{x - 0} = -\sin(0) = 0.$$

2. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x + 2}$

   Ce n'est pas une forme indéterminée puisque $\lim\limits_{x \to 2} x^2 + x - 6 = 0$ et $\lim\limits_{x \to 2} x + 2 = 4$.. On obtient donc :

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x + 2} = 0.$$

3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2 - x - 1}{2x - 2}$

   C'est une forme indéterminée du type $\dfrac{0}{0}$. Factorisons le numérateur :

$$2x^2 - x - 1 = 2(x - 1)\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

   On en déduit :

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - x - 1}{2x - 2} = \lim_{x \to 1} \frac{2(x - 1)\left(x + \frac{1}{2}\right)}{2(x - 1)} = \lim_{x \to 1} x + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$