Mathématiques - Devoir Surveillé 1 - Correction
Vendredi 9 mars 2018 - Durée : 1h00

Tous documents et appareils électroniques sont interdits

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Résoudre le système avec la méthode du pivot de Gauss : On « triangularise » le système :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & y & + & 5z & = & -7 \\ -x & + & 3y & - & 6z & = & 11 \\ 2x & - & 2y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} -x & + & 3y & - & 6z & = & 11 & L_2 \text{ pivot} \\ & & 8y & - & 13z & = & 26 & L_1+3L_2 \\ & & 4y & - & 11z & = & 22 & L_3+2L_2 \end{array}\right.$$

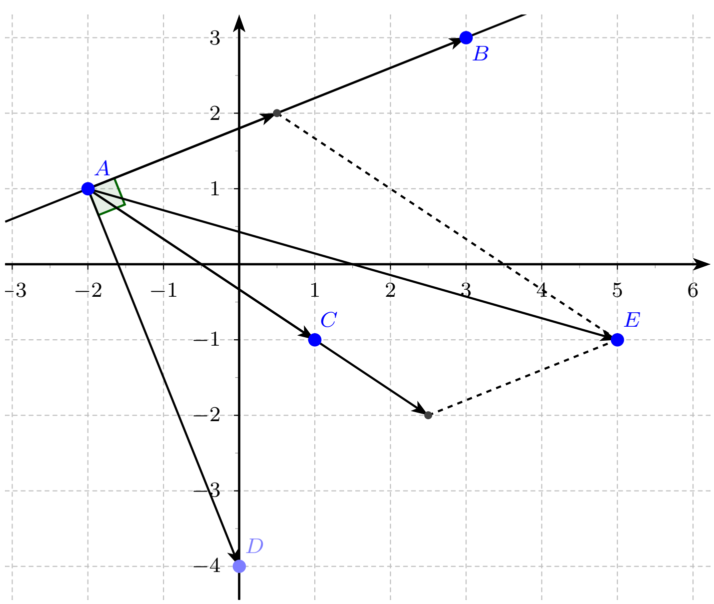
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} -x & + & 3y & - & 6z & = & 11 & \\ & & 8y & - & 13z & = & 26 & L_2 \text{ pivot} \\ & & & & 9z & = & -18 & L_2-2L_3 \end{array}\right.$$

On otient ainsi que $z=-2$, puis on « remonte » l'information et on a $y=0$ et $x=1$.
Conclusion : La solution du système est $(1,0,-2)$.

Exercice 2

On munit le plan du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.
On considère les points $A(-2,1)$, $B(3,3)$ et $C(1,-1)$.

1. Faire un dessin que vous compléterez au fur et à mesure de l'exercice.
   En fin d'exercice on obtient la figure suivante :



2. (a) Déterminer les coordonnées du point D qui appartient à l'axe des ordonnées et tel que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ soient orthogonaux.

   On note (x_D, y_D) les coordonnées de D. On sait que $x_D = 0$. De plus, on a $\overrightarrow{AB} = (5,2)$ et $\overrightarrow{AD} = (2, y_D - 1)$.
   Les vecteurs sont orthogonaux si et seulement si le produit scalaire est nul. Donc

   $$5 \times 2 + 2 \times (y_D - 1) = 0$$

   On en déduit que $y_D = -4$.
   Conclusion : D a pour coordonnées $(0, -4)$.

   (b) Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

   On sait que $\overrightarrow{AD}$ est un vecteur normal à la droite (AB).
   Donc une équation cartésienne s'écrit : $2x - 5y + c = 0$.
   On obtient la valeur de c en remplaçant x et y par les coordonnées de A (ou B) :
   $2 \times (-2) - 5 \times 1 + c = 0$, donc $c = 9$.
   Conclusion : Une équation cartésienne de (AB) est : $2x - 5y + 9 = 0$

3. Soit E le point de coordonnées $(5, -1)$.]

   (a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

   On a $\overrightarrow{AE} = (7, -2)$, $\overrightarrow{AB} = (5, 2)$ et $\overrightarrow{AC} = (3, -2)$.

   (b) Déterminer la valeur de α telle que $\overrightarrow{AE} = \alpha\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

   $$\overrightarrow{AE} = \alpha\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 = 3\alpha + \frac{5}{2} \\ -2 = -2\alpha + 1 \end{cases}$$

   On résout les 2 équations et on trouve $\alpha = \frac{3}{2}$ dans les 2 cas.

   (c) Quelles sont les coordonnées de E dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$?

   D'après la question précédente les coordonnées de E dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ sont tout simplement β et α.
   Conclusion : E a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ dans $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Exercice 3

1. Soient les matrices : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & c \\ b & 2 \end{pmatrix}$.

   Est-il possible de trouver a, b et c pour que B soit l'inverse de A ?

   Il faut que le produit de $A \times B$ soit égal à la matrice identité : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Or $A \times B = \begin{pmatrix} 6 + b & 2c + 2 \\ 15 + ab & 5c + 2a \end{pmatrix}$.

   On déduit de la première ligne que, pour que B soit l'inverse de A, il est nécessaire d'avoir $b = -5$ et $c = -1$.
   On déduit du coefficient ligne 2 colonne 2 que a doit valoir 3.
   On vérifie enfin que le coefficient ligne 2 colonne 1 vaut bien 0 avec les valeurs de a, b et c obtenues ; c'est le cas.
   Conclusion : Oui, c'est possible ! Pour $a = 3$, $b = -5$ et $c = -1$.

2. Soient les matrices :

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 7 & -9 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 4 & 1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Calculer si possible : $-3C$, $D-E$, ${}^tD$ et $D\times E$:
$-3C = \begin{pmatrix} -9 & 12 \\ -3 & 18 \end{pmatrix}$,
$D-E$ est impossible car les matrices ne sont pas de mêmes dimensions,
${}^tD = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 7 & 2 \\ -9 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$,
et $D\times E = \begin{pmatrix} -21 & 31 \\ -6 & 46 \end{pmatrix}$

Exercice 4 Soit la fonction f définie par :

$$f : \begin{array}{rcl} \left]\frac{2}{5};+\infty\right[& \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \ln\left(\dfrac{1}{5x-2}\right). \end{array}$$

1. Dresser le tableau de variation de f sur $\left]\frac{2}{5};+\infty\right[$.
   On a $f'(x) = \dfrac{-5}{5x-2}$, donc

x	$\frac{2}{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

2. Déterminer l'ensemble E pour que f soit bijective de $\left]\frac{2}{5};+\infty\right[$ dans E.
   D'après la question précédente on peut affirmer que f est bijective de $\left]\frac{2}{5};+\infty\right[$ dans $\mathbb{R}$.
3. Déterminer f^{-1}, la fonction réciproque de f.
   On résout l'équation $f(x)=y$:

$$\begin{aligned} f(x)=y &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{5x-2}\right)=y \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{5x-2}=e^y \\ &\Leftrightarrow 5x-2=e^{-y} \\ &\Leftrightarrow 5x=e^{-y}+2 \\ &\Leftrightarrow x=\frac{1}{5}e^{-y}+\frac{2}{5} \end{aligned}$$

   Conclusion : La réciproque de f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f^{-1}(x)=\frac{1}{5}e^{-x}+\frac{2}{5}$.
4. Déterminer l'ensemble F pour que f^{-1} soit bijective de $\mathbb{R}$ dans F.
   L'ensemble d'arrivée de f^{-1} est l'ensemble de définition de f, donc $F=\left]\frac{2}{5};+\infty\right[$.

Exercice 5 ***Sujet 1*** Déterminer les valeurs suivantes (**répondre sur le sujet sans justifier**) :

1. $\cos\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = -\frac{1}{2}$
2. $\arccos\left(\cos\left(\frac{16\pi}{3}\right)\right) = \frac{2\pi}{3}$
3. $\arcsin\left(\cos\left(\frac{16\pi}{3}\right)\right) = -\frac{\pi}{6}$
4. $\arctan\left(\tan\left(\frac{16\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$

Exercice 5 ***Sujet 2*** Déterminer les valeurs suivantes (**répondre sur le sujet sans justifier**) :

1. $\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}$
2. $\arccos\left(\cos\left(\frac{31\pi}{6}\right)\right) = \frac{5\pi}{6}$
3. $\arcsin\left(\cos\left(\frac{31\pi}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$
4. $\arctan\left(\tan\left(\frac{31\pi}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{6}$

Exercice 5 ***Sujet 3*** Déterminer les valeurs suivantes (**répondre sur le sujet sans justifier**) :

1. $\sin\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{29\pi}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{6}$
3. $\arcsin\left(\cos\left(\frac{29\pi}{6}\right)\right) = -\frac{\pi}{3}$
4. $\arctan\left(\tan\left(\frac{29\pi}{6}\right)\right) = -\frac{\pi}{6}$

Exercice 5 ***Sujet 4*** Déterminer les valeurs suivantes (**répondre sur le sujet sans justifier**) :

1. $\cos\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{20\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$
3. $\arcsin\left(\cos\left(\frac{20\pi}{3}\right)\right) = -\frac{\pi}{6}$
4. $\arctan\left(\tan\left(\frac{20\pi}{3}\right)\right) = -\frac{\pi}{3}$