

Mathématiques - Devoir Surveillé 1

Vendredi 15 février 2018 - Durée : 1h30

Tous documents et appareils électroniques sont interdits

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 On considère la fonction

$$f :]2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x+1}{x-2}$$

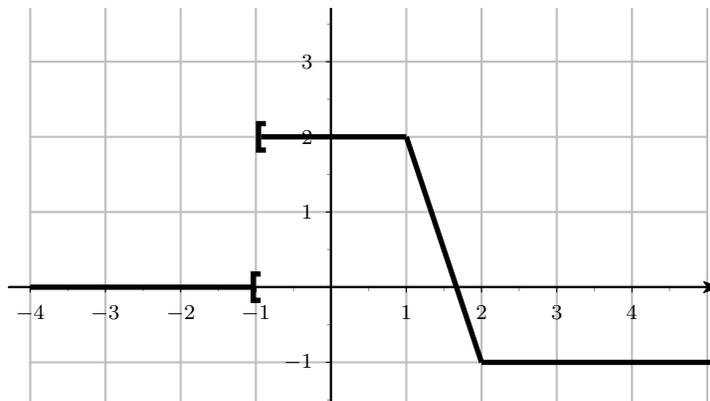
1. Montrer que f est une bijection de E_1 sur F_1 , avec E_1 et F_1 deux ensembles à déterminer.
2. Soit

$$f^{-1} : E_2 \rightarrow F_2$$

- (a) Expliquer pourquoi f admet une application réciproque f^{-1} .
 - (b) Déterminer les ensembles de départ E_2 et d'arrivée et F_2 de f^{-1} .
 - (c) Déterminer l'application réciproque de f .
3. Déterminer g tel que $g \circ f(x) = \ln(x)$

Exercice 2

1. Représenter les fonctions suivantes :
 - (a) $f_1(t) = 2\mathcal{U}(t+1) - \mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t+2)$
 - (b) $f_2(t) = \mathcal{U}(-1-t) + \mathcal{U}(t+1)$
 - (c) $f_3(t) = t\mathcal{U}(t) - (t-1)\mathcal{U}(t-1) + (t-2)\mathcal{U}(t-2) - (t-3)\mathcal{U}(t-3)$
2. Déterminer l'écriture de la fonction suivante à l'aide de fonctions échelons :

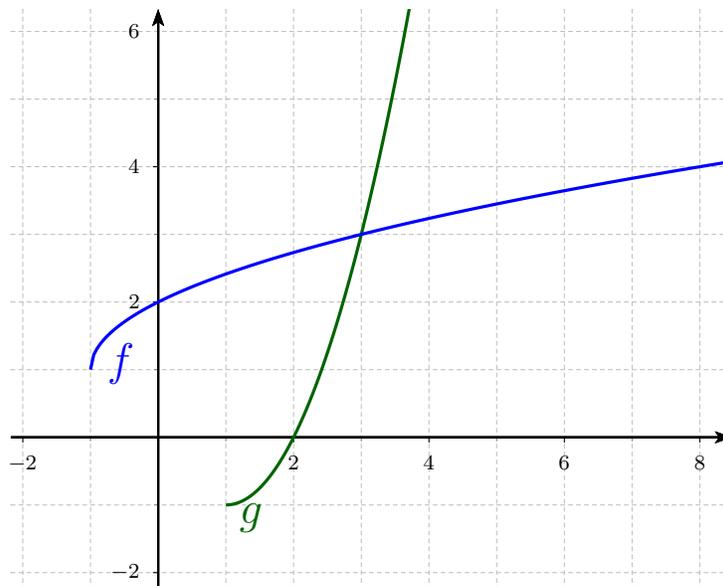


Exercice 3 Les questions suivantes sont indépendants :

1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$ et la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ sont-elles l'inverse l'une de l'autre ?
2. Soit la matrice $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Existe-t-il une matrice D telle que $C \times D$ et $C + D$ existent ?
3. Soit la matrice $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$
 - (a) Déterminer a , b et c pour que $F = \begin{pmatrix} a & -2 & 5 \\ -3 & b & 2 \\ 4 & c & -2 \end{pmatrix}$ soit l'inverse de E .
 - (b) En déduire les solutions du système :
$$\begin{cases} y + z = 1 \\ 2x + 5z = 1 \\ x + 2y + 4z = 6 \end{cases}$$

Exercice 4

1. Soit f et g les fonctions représentées sur le graphique ci-dessous.



Calculer $f \circ g(1)$, $f \circ g(2)$ et $f \circ g(3)$. Ces résultats étaient-ils prévisibles ?

2. On considère les fonctions

$$f(t) = t^2 - 2t + 1 ; g(t) = \sqrt{t} + 1 ; h(t) = \ln(t)$$

- (a) Soit $t > 0$. Que vaut $f \circ g(t)$?
- (b) Soit $t > 0$. Que vaut $g \circ f \circ h(t)$?

Exercice 5 Calculer :

- | | | |
|----------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| 1. $\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ | 3. $\arcsin\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ | 5. $\arctan\left(\tan\left(\frac{28\pi}{3}\right)\right)$ |
| 2. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ | 4. $\arccos\left(\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)\right)$ | 6. $\tan\left(\arctan\left(\sqrt{3}\right)\right)$ |