

Nom :

Prénom :

Groupe :

Mathématiques - Devoir Surveillé 1

Vendredi 18 février 2022 - Durée : 1h00

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Soient les nombres complexes :

$$Z_1 = 1 + i\sqrt{3} \quad Z_2 = 1 - i \quad Z_3 = \frac{Z_1}{Z_2} \quad Z_4 = Z_3^8$$

(a) Mettre Z_1 et Z_2 sous forme exponentielle.

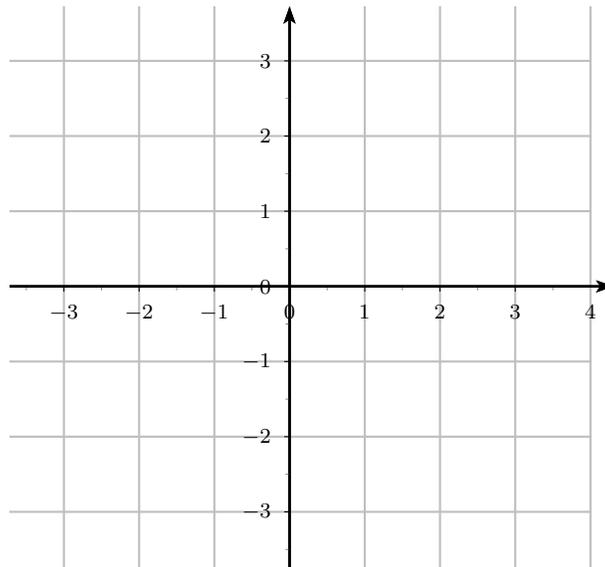
(b) Donner le module et l'argument de Z_3 .

(c) Donner la forme algébrique de Z_4 .

2. Déterminer la forme algébrique de $Z_5 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} + 4e^{-i\frac{\pi}{3}} + 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}} + \sqrt{3}e^{3i\pi}$.

3. Sur le graphique ci-dessous, placer précisément les points d'affixe :

$$Z_6 = 2e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad Z_7 = \overline{Z_6} \quad \text{et} \quad Z_8 = -Z_6$$



Exercice 2 Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2 et en déduire la matrice inverse de A .

2. Déterminer la matrice B telle que

$$B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad b_{i,j} = 3^{j-i}$$

3. Soient les matrices C , D et E suivantes

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad D = (4 \ 1 \ 3) \quad E = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Indiquer les calculs qui sont possibles et ceux qui sont impossibles (on ne demande pas de faire les calculs) : $C + E$, $C \times E$, $E \times C$, et C^2 .

4. Donner un exemple de matrice triangulaire supérieure.

5. Donner un exemple de matrice F de taille 3×3 telle que ${}^tF = F$.

6. Donner l'écriture matricielle du système (on ne demande pas de résoudre) :

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$$

Exercice 3

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x - 12}{x - 3}$

2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{x - 3}$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3e^x}{\ln(x) + 10}$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - e^{-\ln(x)+10}$

5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x+1} + 3x - 5$

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x+1}}{e^{-x^2+3}}$

7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 3x - 1) - 3 \ln(x)$

Exercice 4 Soit la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue en 0?

2. La fonction f est-elle dérivable en 0?