# Mathématiques - Devoir Surveillé 2
# Vendredi 31 mars 2017 - Durée : 1h45

*Tous documents et appareils électroniques sont interdits*

*Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.*

**Exercice 1**

Soit la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^4+1}{x^3(x-3)}$$

Répondre par Vrai ou Faux sans justifier (1 point par réponse juste, -0.5 par réponse fausse).
On détermine la décomposition en éléments simples de $f$ puis on répond aux différentes questions.
Le degré du numérateur est supérieur au degré du dénominateur, on pose donc la division euclidienne de $x^4+1$ par $x^3(x-3) = x^4 - 3x^3$.
On obtient un quotien de 1 et un reste de $3x^3+1$. Donc

$$f(x) = 1 + \frac{3x^3+1}{x^3(x-3)}$$

Les racines du dénominateur sont 3 (racine simple) et 0 (racine triple), donc la forme de la DES de $f$ est

$$f(x) = 1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} + \frac{d}{x-3}$$

On calcule facilement $d$ en multipliant $f$ par $x-3$ puis en remplaçant $x$ par 3 : $d = \frac{82}{27}$.
On calcule presque aussi facilement $a$ en multipliant $f$ (plus précisemment la partie fractionnaire de $f$) par $x$ et en faisant tendre $x$ vers $+\infty$ :

$$3 = a + d \Leftrightarrow a = -\frac{1}{27}$$

On calcule $c$ en multipliant $f$ par $x^3$ et en remplaçant $x$ par zéro : $c = -\dfrac{1}{3}$.
On calcule $b$ en remplaçant $x$ par 1 :

$$-2 = a + b + c - \frac{d}{2} \Leftrightarrow -2 = -\frac{1}{27} + b - \frac{1}{3} - \frac{41}{27} \Leftrightarrow b = \frac{1}{9}$$

La DES de $f$ est donc :

$$f(x) = 1 - \frac{1}{27} \times \frac{1}{x} - \frac{1}{9} \times \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{x^3} + \frac{82}{27} \times \frac{1}{x-3}$$

Selon les sujets les réponses sont
- Vrai, Vrai, Vrai, Vrai
- Faux, Vrai, Faux, Vrai
- Faux, Faux, Faux, Faux (cas ci-dessous)
- Vrai, Faux, Vrai, Faux

1. La fonction $f$ peut s'écrire $f(x) = 1 + \dfrac{x^3+1}{x^3(x-3)}$.
2. La forme de la DEs de $f$ est $f(x) = 1 + \dfrac{a}{x^3} + \dfrac{b}{x-3}$.
3. Un des éléments simples de $f$ est $\dfrac{\frac{28}{27}}{x-3}$.
4. Un des éléments simples de $f$ est $\dfrac{\frac{1}{3}}{x^3}$.

## Exercice 2

Considérons un polynôme $P$ défini par

$$P(X) = 2X^5 - 3X^4 - 8X^3 + 5X^2 + \alpha X + \beta$$

1. Déterminer les valeurs de $\alpha$ et $\beta$ pour que 2 et -1 soient racines de $P$.

   $P(2) = 0$ permet d'obtenir la relation $2\alpha + \beta = 28$.
   $P(-1) = 0$ permet d'obtenir la relation $-\alpha + \beta = -8$.
   On résout le système et on obtient $\alpha = 12$ et $\beta = 4$.

Pour les questions suivantes on remplacera $\alpha$ et $\beta$ par les valeurs 12 et 4.

2. Montrer que les racines 2 et -1 sont de multiplicité 2.

   On calcule les dérivées successives de $P$

   $$P'(X) = 10X^4 - 12X^3 - 24X^2 + 10X + 12 \qquad P''(X) = 40X^3 - 36X^3 - 48X + 10$$

   Ainsi $P'(2) = 0$ et $P'(-1) = 0$ donc 2 et $-1$ sont au moins racine double.
   Et $P''(2) \neq 0$ et $P''(-1) \neq 0$ donc 2 et $-1$ ne sont pas racines triples.

3. Sachant que $(X-2)^2(X+1)^2 = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 4X + 4$, poser la division euclidienne de $P$ par $(X-2)^2(X+1)^2$.

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
2X^5 & -3X^4 & -8X^3 & +5X^2 & +12X & +4 & X^4 \;-2X^3 \;-3X^2 \;+4X \;+4 \\ \cline{7-7}
-(2X^5 & -4X^4 & +6X^3 & +8X^2 & 8X) & & 2X+1 \\ \cline{1-5}
 & X^4 & -2X^3 & -3X^2 & +4X & +4 & \\
 & -(X^4 & -2X^3 & -3X^2 & +4X & +4) & \\ \cline{2-6}
 & & & & & 0 &
\end{array}$$

   On peut donc écrire

   $$P(X) = (X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 4X + 4) \times (2X+1) + 0$$

4. En déduire la forme factorisée de $P$ dans $\mathbb{R}[X]$.

   Le reste de la division euclidienne de la question précédente étant nul, on en déduit que la forme factorisée de $P$ est
   $$P(X) = (2X+1)(X-2)^2(X+1)^2$$

**Exercice 3**

1. Quel est le degré minimal d'un polynôme $P$ qui verifie toutes les conditions suivantes :
   - -2 est racine simple de $P$,
   - 1+i est racine de multiplicité 2 de $P$,
   - le reste de la division euclidienne de $P$ par $X^2+1$ est nul,
   - $P$ est à coefficient réels.

   On déduit des quatre hypothèses que le polynôme $P$ est divisible par

   $$(X+2)(X-(i+1))^2(X-(1-i))^2(X^2+1)$$

   Donc $P$ est au moins de degré 7.

2. On cherche un polynôme $R$, qui ne soit pas de degré 0, tel que $R\left(R(X)\right)=R(X)$.

   (a) Déterminer le degré de $R$.

   On note $n$ le degré de $R$. On a alors $deg(R \circ R)=n^2$.
   Donc $R\left(R(X)\right)=R(X)$ si et seulement si $n^2=n$ et donc $n=1$ (car $R$ n'est pas de degré 0).

   (b) Déterminer le seul polynôme qui réponde à l'équation : $R\left(R(X)\right)=R(X)$.

   On cherche donc un polynôme de la forme $R(X)=aX+b$.

   $$\begin{aligned} R\left(R(X)\right)=R(X) &\Leftrightarrow a(aX+b)+b=aX+b \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2=a \\ ab+b=b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} \end{aligned}$$

   <u>Conclusion :</u> le seul polynôme qui réponde à la question est $R(X)=X$.

**Exercice 4**

Calculer les intégrales suivantes par la méthode de votre choix.

1. $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2x)\cos(x)dx$.

   <u>méthode 1 :</u> On utilise la formule $\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$ :

   $$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2x)\cos(x)dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin(x)\cos^2(x)dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}\cos^3(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

méthode 2 : On linéarise la fonction sachant que $\sin(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$ :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\cos(x)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(3x) + \sin(x)dx \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}\cos(3x) - \cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+1\right) \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

2. $J = \displaystyle\int_0^e \frac{t}{x}dt$. La variable d'intégration est $t$, donc

$$\begin{aligned} J &= \int_0^e \frac{t}{x}dt \\ &= \left[\frac{t^2}{2x}\right]_0^e \\ &= \frac{e^2}{2x} \end{aligned}$$

3. $K = \displaystyle\int_1^2 \frac{x^2+2}{x^3+6x-6}dx$. On reconnait une forme $\dfrac{u'}{u}$ :

$$\begin{aligned} K &= \int_1^2 \frac{x^2+2}{x^3+6x-6}dx \\ &= \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{3x^2+6}{x^3+6x-6}dx \\ &= \frac{1}{3}\left[\ln(x^3+6x-6)\right]_1^2 \\ &= \frac{1}{3}\ln(14) \end{aligned}$$

4. $L = \displaystyle\int_3^4 \frac{x^3+7x^2+7x-15}{x^2+2x-3}dx$. Le degré du numérateur est supérieur ou égal au degré du dénominateur, on pose donc la division euclidienne de $x^3+7x^2+7x-15$ par $x^2+2x-3$.
On obtient que

$$x^3+7x^2+7x-15 = (x^2+2x-3)\times(x+5)+0$$

Et donc

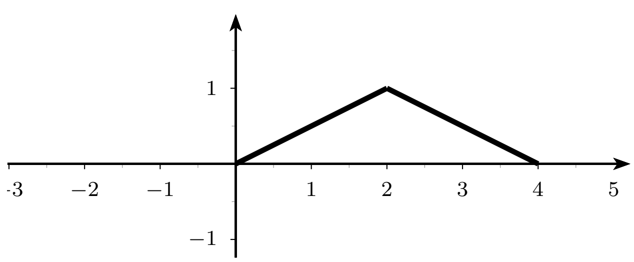
$$\begin{aligned}
L &= \int_3^4 \frac{x^3+7x^2+7x-15}{x^2+2x-3}dx \\
&= \int_3^4 x+5dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x^2+5x\right]_3^4 \\
&= 8+20-\frac{9}{2}-15 \\
&= \frac{17}{2}
\end{aligned}$$

5. $M = \displaystyle\int_0^1 \left(t^2-2t\right)e^{2t}dt$. On effectue 2 intégrations par parties (IPP) successives :

$$\begin{aligned}
M &= \int_0^1 \left(t^2-2t\right)e^{2t}dt \\
&= \left[\frac{1}{2}\left(t^2-2t\right)e^{2t}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 (2t-2)\,e^{2t}dt \\
&= \left[\frac{1}{2}\left(t^2-2t\right)e^{2t}\right]_0^1 - \int_0^1 (t-1)\,e^{2t}dt \\
&= \left[\frac{1}{2}\left(t^2-2t\right)e^{2t}\right]_0^1 - \left[\frac{1}{2}(t-1)\,e^{2t}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2t}dt \\
&= \left[\frac{1}{2}\left(t^2-2t\right)e^{2t}\right]_0^1 - \left[\frac{1}{2}(t-1)\,e^{2t}\right]_0^1 + \left[\frac{1}{4}e^{2t}\right]_0^1 \\
&= -\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4} \\
&= -\frac{1}{4}e^2-\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

## Exercice 5

Soit la fonction $s(t)$ définie sur $[0;4]$ par :




1. Déterminer $\displaystyle\int_0^4 s(t)dt$. Il suffit de calculer l'aire du triangle !

$$\int_0^4 s(t)dt = 2$$

2. On note $s_2$ la fonction impaire définie sur $[-4;4]$ telle que $s_2(t) = s(t)$ sur $[0;4]$.
   Déterminer $\displaystyle\int_{-4}^{4} s_2(t)dt$.
   On intégre une fonction impaire sur un intervalle centré en zéro donc
$$\int_{-4}^{4} s_2(t)dt = 0$$

3. On note $s_3$ la fonction paire définie sur $[-4;4]$ telle que $s_3(t) = s(t)$ sur $[0;4]$.
   Déterminer $\displaystyle\int_{-4}^{4} s_3(t)dt$.
   On intégre une fonction paire sur un intervalle centré en zéro donc
$$\int_{-4}^{4} s_3(t)dt = 2\int_{0}^{4} s_3(t)dt = 2 \times 2 = 4$$