

## Mathématiques - Devoir Surveillé 2 - Sujet 2

### Vendredi 6 avril 2018 - Durée : 1h15

*Tous documents et appareils électroniques sont interdits*

*Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.*

**Exercice 1** Soit  $P(X) = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ .

1. Montrez que  $-1$  est racine double de  $P$ .
2. Effectuez la division euclidienne de  $P$  par  $X - i$ .
3. Sans poser la division euclidienne de  $P$  par  $X + i$ , justifiez pourquoi le reste est forcément nul.
4. Déterminez les racines du polynôme  $P$  dans  $\mathbb{C}$ .
5. En déduire la factorisation de  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$  et dans  $\mathbb{C}[X]$ .

**Exercice 2** On cherche à déterminer l'ensemble des polynômes  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que

$$P(X^2) = (X^2 + 1)P(X) \quad (\star)$$

1. Soit  $P$  un polynôme qui vérifie  $(\star)$ . Montrez que le degré de  $P$  est égal à 2.
2. En déduire l'ensemble des polynômes vérifiant  $(\star)$ .

**Exercice 3**

1. Donnez **la forme** de la décomposition en élément simples (DES) dans  $\mathbb{R}[X]$  des fractions rationnelles suivantes :

$$(a) F_1(X) = \frac{X^3}{1+X}, \quad (b) F_2(X) = \frac{2}{X^3-X}, \quad (c) F_3(X) = \frac{2X+1}{X^3(X^2+1)}.$$

2. Calculez les constantes dans la DES de  $F_1$  et  $F_2$ .

**Exercice 4** Dans chacun des cas ci-dessous exprimez  $u_n$  en fonction de  $n$ .

1.  $(u_n)$  est une suite arithmétique telle que :  $u_3 = 2$  et  $u_{11} = 0$ .
2.  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison  $q$  telle que :  $q = 2$  et  $u_0 + u_1 + \dots + u_7 = 510$ .

**Exercice 5** Pour chacune des suites  $u_n = (-3)^{2n+1}$  et  $v_n = \frac{e^{(n+1)^2}}{e^n}$  :

1. Calculez les 3 premiers termes de la suite.
2. Précisez en justifiant si la suite est géométrique ou non. Si oui, précisez sa raison.

**Exercice 6** Déterminez la limite des suites suivantes :

$$1. u_n = \frac{n^2 - 2n + 1}{n^5 + 2n^4 + 2}, \quad 2. v_n = \sqrt{n-1} - \sqrt{n}.$$