

Nom :

Prénom :

Groupe :

## Mathématiques - Devoir Surveillé 2

### Vendredi 2 mars 2021 - Durée : 1h30

*Tout document et appareil électronique est interdit*

*Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.*

**Exercice 1** Les questions suivantes sont indépendantes

1. Résoudre le système suivant par la méthode du pivot de Gauss

$$\begin{cases} x - y + 3z = 5 \\ 2x - 2y - 2z = 2 \\ -x + 2y + 5z = 6. \end{cases}$$

2. Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$ .

- (a) Montrer que  $A$  est inversible.
- (b) Déterminer la matrice inverse de  $A$  par la méthode de votre choix.
- (c) Résoudre le système suivant en utilisant  $A^{-1}$  :

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ -3x + 8y = 2 \end{cases}$$

**Exercice 2** Les questions suivantes sont indépendantes

On considère les matrices suivantes :

1.  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

3.  $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

5.  $E = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 4 \\ 5 & -6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

2.  $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

4.  $D = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$

- Parmi les 5 matrices, quelles sont celles qui sont inversibles ?
- Parmi les calculs suivants, dire ceux qui sont réalisables (sans faire les calculs) :

$$A + B \quad D \times C \quad E \times A \quad A \times E \quad B \times B \quad 6 \times D$$

3. Calculer  $B \times A$

**Exercice 3** Soit le polynôme  $P(X) = x^5 + 6x^4 + 13x^3 + 28x^2 + 36x + 16$

1. Montrer que  $-1$  est racine double pour  $P$ .
2. Calculer  $P(2i)$ .
3. Poser la division euclidienne de  $P$  par  $X + 4$ .
4. Dédurre, des questions précédentes, la factorisation de  $P$  dans  $\mathbb{R}$  et dans  $\mathbb{C}$ .

**Exercice 4** On considère les fractions rationnelles suivantes :

$$F_1(X) = \frac{X - 5}{(X + 2)(X - 3)} \quad F_2(X) = \frac{X^2}{(X - 1)(X^2 + 3X - 4)} \quad F_3(X) = \frac{X^3}{X^3 - 1}$$

1. Donner **la forme** de la D.E.S de  $F_1$  (on ne demande pas la valeur des coefficients).
2. Donner **la forme** de la D.E.S de  $F_2$  (on ne demande pas la valeur des coefficients).
3. Déterminer la D.E.S de  $F_3$  (il faut calculer les valeurs des coefficients!).

**Exercice 5**

On considère les polynômes suivants

$$P(X) = X^7 - 3X^3 + 1 \quad Q(X) = X^3 + 4X^2 - 2 \quad R(X) = X^2 - 6X + 1$$

1. Déterminer le degré des polynômes suivants  $P \times Q$ ,  $P \circ R$  et  $P + Q + R$ .
2. Déterminer le degré du polynôme  $T(X) = Q(X)(X + 3) - (X^2 - 1)R(X)$ .