

Nom :

Prénom :

Groupe :

Mathématiques - Devoir Surveillé 2

Vendredi 14 avril 2023 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, déterminer la matrice inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

1. Résoudre le système suivant en utilisant **la méthode de Gauss**.

$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x - 3y + z = -8 \\ 3x + y + 2z = 11 \end{cases}$$

2. On considère le système suivant :

$$\begin{cases} 3x + 2z = 8 \\ x - 2z = 16 \\ x + 2y = -8 \end{cases}$$

- Ecrire le système sous la forme $AX = B$ avec $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$, $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
- Calculer le déterminant de la matrice A
- Déterminer la matrice inverse de A
- Résoudre le système **matriciellement**

Exercice 3 Soient les polynômes $P(X) = X^6 - 5X^5 + 10X^4 - 8X^3 - 4X^2 + 12X - 8$ et $Q(X) = X^2 - X - 2$.

1. Donner le degré de :

- | | |
|---------------------------------|--------------------------------|
| (a) $R_1(X) = P(X) \times Q(X)$ | (c) $R_3(X) = P(X) - Q(X)$ |
| (b) $R_2(X) = P(X) \circ Q(X)$ | (d) $R_4(X) = P(X) - X^4 Q(X)$ |

2. Effectuer la division euclidienne de P par Q .

3. Calculer $(1 + i)^2$ puis en déduire $(1 + i)^3$ et $(1 + i)^4$.

4. Montrer que $1 + i$ est racine du polynôme $R(X) = X^4 - 4X^3 + 8X^2 - 8X + 4$.
5. Déterminer la multiplicité de la racine $1 + i$ pour R
6. Déterminer, en justifiant, une autre racine de R ainsi que sa multiplicité.
7. Factoriser P dans \mathbb{C}
8. En déduire la factorisation de P dans \mathbb{R}

Exercice 4

1. Donner la DES de $F_1(X) = \frac{X-1}{(X+1)(X-2)}$
2. Donner la DES de $F_2(X) = \frac{X-1}{(X+1)^2(X-2)}$
3. Donner **la forme** de la DES de $F_3(X) = \frac{X-2}{(X^2+1)(X-1)}$