

Nom :

Prénom :

Groupe :

Mathématiques - Devoir Surveillé 2

Vendredi 29 mars 2024 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Soit la fonction $f(x) = \ln(x + 2) - 3$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f . On le notera D par la suite.
2. Montrer que f est bijective de D dans \mathbb{R} .
3. Déterminer la réciproque de f .

Exercice 2 Donner les valeurs en justifiant la démarche :

- | | |
|--|--|
| 1. $\arcsin(0.5)$ | 4. $\arccos\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ |
| 2. $\arccos(-1)$ | 5. $\arccos\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ |
| 3. $\arctan\left(\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ | 6. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \arcsin(t)$ |

Exercice 3 Soient les matrices A , B et C suivantes

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 21 \\ 4 & -12 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les déterminants de A , B et C
2. A , B et C sont-elles inversibles ?
3. Calculer, si possible, A^{-1} et B^{-1}

Exercice 4 Résoudre les systèmes suivants en utilisant **la méthode de Gauss**.

1.

$$\begin{cases} x + y - 2z = 7 \\ 2x + 3y - 5z = 19 \\ -3x + 5y - z = 15 \end{cases}$$
2.

$$\begin{cases} 3a + 2b = 1 \\ -7a - 4b = 5 \end{cases}$$

Exercice 5 Les questions 1,2 et 3 sont indépendantes.

1. Soient les polynômes $P_1(X) = X^5 + 2X^4 + 3X^2 + X - 5$ et $Q(X) = X(X + 1)^2$.

Donner le degré de :

(a) $R_1(X) = P(X) \times Q(X)$

(c) $R_3(X) = P(X) - (X^2 + 1)Q(X)$

(b) $R_2(X) = Q \circ P(X)$

2. Déterminer un polynôme P_2 tel que :

- $\deg(P_2) = 8$
- $P_2 \in \mathbb{R}[X]$
- -3 et $1+2i$ sont racines simples de P_2
- 42 est racine de multiplicité 3 de P_2

3. Le polynôme $P_3(X) = X^3 + (1 + 3i)X^2 + 2 - 3i$ admet-il une racine réelle ?

Exercice 6 Soient les polynômes $P(X) = X^5 - 2X^4 - 3X^3 - 12X^2 - 28X - 16$.

1. Montrer que $2i$ est racine de P
2. $a = -1$ est racine de P . Déterminer sa multiplicité.
3. Poser la division euclidienne de P par $(X - 4)$.
4. Donner la forme factorisée de P dans $\mathbb{C}[X]$.
5. Donner la forme factorisée de P dans $\mathbb{R}[X]$.