Nom : Prénom : Groupe :

Mathématiques - Devoir Surveillé 2 - Correction
Vendredi 29 mars 2024 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Soit la fonction $f(x) = \ln(x+2) - 3$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f. On le notera D par la suite.
   La fonction ln est définie sur $]0; +\infty[$, il faut donc que $x + 2 > 0$.
   Donc
   $$D =]-2; +\infty[$$
2. Montrer que f est bijective de D dans $\mathbb{R}$.
   On étudie la fonction f
   $$f'(x) = \frac{1}{x+2}$$
   Donc $f'(x) > 0$ sur D et f est strictement croissante sur D.
   De plus
   $$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \ln(0^+) = -\infty$$
   et
   $$\lim_{x \to +_infty} f(x) = \ln(+\infty) = +\infty$$
   Donc f est bijective de $]-2; +\infty$ dans $\mathbb{R}$.
3. Déterminer la réciproque de f.
   On résout l'équation $f(x) = y$ en fonction de y :
   $$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow \ln(x+2) - 3 = y \\ &\Leftrightarrow \ln(x+2) = y + 3 \\ &\Leftrightarrow x + 2 = e^{y+3} \\ &\Leftrightarrow x = e^{y+3} - 2 \end{aligned}$$
   Donc $f^{-1}(x) = e^{x+3} - 2$

Exercice 2 Donner les valeurs en justifiant la démarche :

1. arcsin(0.5)$= \dfrac{\pi}{6}$
2. $\arccos(-1)$
3. $\arctan\left(\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$
4. $\arccos\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

5. $\arccos\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$
6. $\lim\limits_{t \to +\infty} \arcsin(t)$

Exercice 3 Soient les matrices A, B et C suivantes

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 21 \\ 4 & -12 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les déterminants de A, B et C
2. A, B et C sont-elles inversibles ?
3. Calculer, si possible, A^{-1} et B^{-1}

Exercice 4 Résoudre les systèmes suivants en utilisant **la méthode de Gauss**.

1.
$$\begin{cases} x + y - 2z = 7 \\ 2x + 3y - 5z = 19 \\ -3x + 5y - z = 15 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} 3a + 2b = 1 \\ -7a - 4b = 5 \end{cases}$$

Exercice 5 Les questions 1,2 et 3 sont indépendantes.

1. Soient les polynômes $P_1(X) = X^5 + 2X^4 + 3X^2 + X - 5$ et $Q(X) = X(X+1)^2$.
   Donner le degré de :

   (a) $R_1(X) = P(X) \times Q(X)$

   (b) $R_2(X) = Q \circ P(X)$

   (c) $R_3(X) = P(X) - (X^2+1)Q(X)$

2. Déterminer un polynôme P_2 tel que :
   - $deg(P_2) = 8$
   - $P_2 \in \mathbb{R}[X]$
   - -3 et 1+2i sont racines simples de P_2
   - 42 est racine de multiplicité 3 de P_2

3. Le polynôme $P_3(X) = X^3 + (1+3i)X^2 + 2 - 3i$ admet-il une racine réelle ?

Exercice 6 Soient les polynômes $P(X) = X^5 - 2X^4 - 3X^3 - 12X^2 - 28X - 16$.

1. Montrer que $2i$ est racine de P
2. $a = -1$ est racine de P. Déterminer sa multiplicité.
3. Poser la division euclidienne de P par $(X-4)$.
4. Donner la forme factorisée de P dans $\mathbb{C}[X]$.
5. Donner la forme factorisée de P dans $\mathbb{R}[X]$.