Mathématiques - Devoir Surveillé 3
Vendredi 2 juin 2023 - Durée : 1h15

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \dfrac{6x+15}{x^2+1} = 3 \times \dfrac{2x}{x^2+1} + 15 \times \dfrac{1}{x^2+1}$ donc
$$F_1(x) = 3\ln(x^2+1) + 15\arctan(x) + C_1$$

2. $f_2(x) = \dfrac{6x+15}{x^2+5x+1} = 3 \times \dfrac{2x+5}{x^2+5x+1}$ donc
$$F_2(x) = 3\ln|x^2+5x+1| + C_2$$

3. $f_3(x) = \dfrac{6x+15}{x^2} = \dfrac{6x}{x^2} + \dfrac{15}{x^2} = \dfrac{6}{x} + \dfrac{15}{x^2}$ donc
$$F_3(x) = 6\ln|x| - \frac{15}{x} + C_3$$

4. $f_4(x) = \dfrac{6x+15}{7} = \dfrac{6}{7}x + \dfrac{15}{7}$ donc
$$F_4(x) = \frac{3}{7}x^2 + \frac{15}{7}x + C_4$$

Exercice 2 Calculer par la méthode de votre choix

1. $I_1 = \displaystyle\int_2^3 (4t-2)\ln(t-1)\,dt$
   On procède par Intégration Par Parties :
   On pose $u(t) = \ln(t-1)$ et $v'(x) = 4t-2$.
   On calcule alors : $u'(t) = \dfrac{1}{t-1}$ et $v(x) = 2t^2 - 2t$.

Par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_2^3 (4t-2)\ln(t-1)\,dt \\
&= \left[(2t^2-2t)\ln(t-1)\right]_2^3 - \int_2^3 (2t^2-2t)\frac{1}{t-1}\,dt \\
&= \left[(2t^2-2t)\ln(t-1)\right]_2^3 - \int_2^3 \frac{2t(t-1)}{t-1}\,dt \\
&= \left[(2t^2-2t)\ln(t-1)\right]_2^3 - \int_2^3 2t\,dt \\
&= \left[(2t^2-2t)\ln(t-1)\right]_2^3 - \left[t^2\right]_2^3 \\
&= 12\ln(2) - 4\ln(1) - 9 + 4 \\
&= 12\ln(2) - 5
\end{aligned}$$

2. $I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)\cos(5t)dt$

   On commence par linéariser la fonction :

$$\begin{aligned}
\sin(2t)\cos(5t) &= \frac{e^{2it}-e^{-2it}}{2i} \times \frac{e^{5it}+e^{-5it}}{2} \\
&= \frac{e^{7it}-e^{-3it}-e^{3it}+e^{-7it}}{4i} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{e^{7it}+e^{-7it}}{2i} - \frac{1}{2} \times \frac{e^{-3it}+e^{3it}}{2i} \\
&= \frac{1}{2}\cos(7t) - \frac{1}{2}\cos(3t)
\end{aligned}$$

   Donc

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)\cos(5t)dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos(7t) - \frac{1}{2}\cos(3t)dt \\
&= \left[\frac{1}{14}\sin(7t) - \frac{1}{6}\sin(3t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{14} - \frac{1}{6} \\
&= -\frac{2}{21}
\end{aligned}$$

3. $I_3 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4(2x)\cos^3(2x)dx$

   (indication : on pourra poser le changement de variable $t = sin(2x)$)

   Les nouvelles bornes sont $\sin(0) = 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

   On peut montrer que $dt = 2\cos(2x)dx$.

Et donc

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4(2x)\cos^3(2x)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4(2x)\cos^2(2x) \times 2\cos^2(2x)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4(2x)(1-\sin^2(2x)) \times 2\cos^2(2x)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{1} t^4(1-t^2)dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{1} t^4 - t^6 dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) \\
&= \frac{1}{35}
\end{aligned}$$

4. $I_4 = \int_0^{\frac{1}{3}} (2t+1)e^{-3x}dx$

   On observe que l'intégrale est par rapport à la variable x. Donc le terme $(2t+1)$ peut être sorti de l'intégrale :

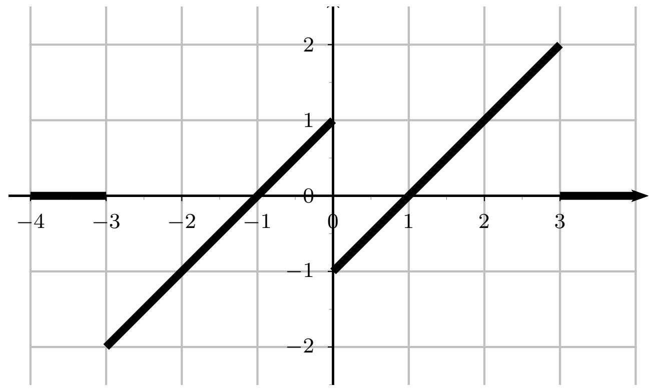
$$\begin{aligned}
I_4 &= \int_0^{\frac{1}{3}} (2t+1)e^{-3x}dx \\
&= (2t+1)\int_0^{\frac{1}{3}} e^{-3x}dx \\
&= (2t+1)\left[-\frac{1}{3}e^{-3x}\right]_0^{\frac{1}{3}} \\
&= (2t+1)\left(-\frac{1}{3}e^{-1} + \frac{1}{3}e^0\right)
\end{aligned}$$

Exercice 3

1. Calculer l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[-4;4]$:

$$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < -3 \\ t+1 \text{ si } t \in [-3;0[\\ t-1 \text{ si } t \in [0;3] \\ 0 \text{ si } t > 3 \end{cases}$$

   On trace la courbe de f :

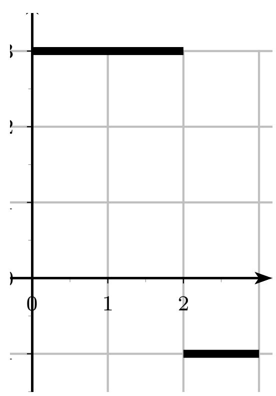


La fonction f est impaire et l'intervalle est centré en 0. donc $\int_{-4}^{4} f(t)dt = 0$

2. Calculer l'intégrale de la fonction g sur l'intervalle $[-2;7]$:
   - g est périodique de période 3
   - $g(x) = 3$ sur l'intervalle $[0,2[$
   - $g(x) = -1$ sur l'intervalle $[2,3[$

   La fonction g est de période 3 et l'intervalle $[-2;7]$ est de longueur 9. On peut donc calculer l'intégrale sur une période puis multiplier par 3

   On trace la courbe de la fonction g sur $[0,3]$:



   Il suffit de calculer les surfaces des rectangles : $\int_{0}^{3} g(t)dt = 2 \times 3 - 1 = 5$ Donc

$$\int_{-2}^{7} f(t)dt = 3 \times 5 = 15$$

3. Calculer l'intégrale $J_3 = \int_{-1}^{4} |x^2 - 1| \, dx$

   Le polynôme $Px() = x^2 - 1$ est négatif entre -1 et 1, puis positif entre 1 et 4. Donc

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{4} |x^2 - 1| \, dx &= \int_{-1}^{1} -x^2 + 1 \, dx + \int_{1}^{4} x^2 - 1 \, dx \\
&= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{1}{3}x^2 - x\right]_{1}^{4} \\
&= -\frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} + 1 + \frac{64}{3} - 4 - \frac{1}{3} + 1 \\
&= \frac{58}{3}
\end{aligned}$$

Exercice 4

1. Déterminer la nature de chaque intégrale généralisée :

   (a) $K_1 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^3+t^2+2}dt$

   On sait que pour tout $t > 1$ on a $0 < e^{-t} < 1$ donc $0 < \dfrac{e^{-t}}{t^3+t^2+2} < \dfrac{1}{t^3+t^2+2}$.

   De plus $\dfrac{1}{t^3+t^2+2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^3}$.

   Or $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{t^3}dt$ converge d'après le critère de Riemann.

   Donc $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{t^3+t^2+2}dt$ converge aussi par équivalence.

   Donc K_1 converge par comparaison.

   (b) $K_2 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt$

   On sait que $\sin(X) \underset{0}{\sim} X$ donc $\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$.

   Donc $\dfrac{1}{t}\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t} \times \dfrac{1}{\sqrt{t}} = \dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$.

   Or $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}}dt$ conerge d'après le critère de Riemann.

   Donc K_2 conerge aussi par équivalence.

   (c) $K_3 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{4}{x^2+11x+30}dx$

   On sait que $\dfrac{4}{x^2+11x+30} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{4}{x^2}$.

   Or $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^2}dx$ conerge d'après le critère de Riemann.

   Donc K_3 converge aussi par équivalence.

2. Calculer la valeur de K_3

   On doit faire une D.E.S :

$$
\begin{aligned}
K_3 &= \int_1^{+\infty} \frac{4}{x^2+11x+30}dx \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{4}{(x+5)(x+6)}dx \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{a}{x+5} + \frac{b}{x+6}dx \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{4}{x+5} - \frac{4}{x+6}dx \\
&= [4\ln|x+5| - 4\ln|x+6|]_1^{+\infty} \\
&= \lim_{x\to+\infty} 4\ln(x+5) - 4\ln(x+6) - 4\ln(6) + 4\ln(7) \\
&= \lim_{x\to+\infty} 4\ln\left(\frac{x+5}{x+6}\right) - 4\ln(6) + 4\ln(7) \\
&= 4\ln(1) - 4\ln(6) + 4\ln(7) \\
&= -4\ln(6) + 4\ln(7)
\end{aligned}
$$

Exercice 5

1. Montrer que

$$\int_0^1 \frac{2xe^x}{3(x+1)^2}dx = \left[\frac{-2}{3(x+1)} \times xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-2}{3(x+1)} \times (1+x)e^x dx$$

On pose $u(x) = xe^x$ et $v'(x) = \dfrac{2}{3(x+1)^2}$.

On calcule alors que $u'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$ et $v(x) = \dfrac{-2}{3(x+1)}$.

Ainsi, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{2xe^x}{3(x+1)^2}dx &= \int_0^1 u(x)v'(x)dx \\
&= [u(x) \times v(x)]_0^1 - \int_0^1 v(x) \times u'(x)dx \\
&= \left[\frac{-2}{3(x+1)} \times xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-2}{3(x+1)} \times (1+x)e^x dx
\end{aligned}$$

2. En déduire la valeur de $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{2xe^x}{3(x+1)^2}dx$.

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^1 \frac{2xe^x}{3(x+1)^2}dx \\
&= \left[\frac{-2}{3(x+1)} \times xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-2}{3(x+1)} \times (1+x)e^x dx \\
&= \left[\frac{-2}{3(x+1)} \times xe^x\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2}{3} \times e^x dx \\
&= \left[\frac{-2}{3(x+1)} \times xe^x\right]_0^1 + \left[\frac{2}{3} \times e^x\right]_0^1 \\
&= \frac{-2}{6} \times e^1 - 0 + \frac{2}{3} \times e^1 - \frac{2}{3} \times e^0 \\
&= \frac{-1}{3} \times e + \frac{2}{3} \times e - \frac{2}{3} \\
&= \frac{1}{3} \times e - \frac{2}{3}
\end{aligned}$$