Mathématiques - Devoir Surveillé 3
Vendredi 7 juin 2024 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Calculer par la méthode de votre choix

1. $I_1 = \displaystyle\int_{-4}^{4} e^{-\frac{1}{4}t+3}\, dt$
2. $I_2 = \displaystyle\int_{-2}^{2} t^3 e^{t^2+3}\, dt$
3. $I_3 = \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos(3x)\cos(5x) dx$
4. $I_4 = \displaystyle\int_{1}^{e} \frac{2}{\ln(t)+4} \times \frac{1}{t}\, dt$
   (indication : on pourra poser le changement de variable $u = \ln(t)$)

Exercice 2

1. Déterminer la D.E.S de la fonction $f(t) = \dfrac{25x^2}{(x^2+3x-4)(x+4)}$.
2. Calculer $I_6 = \displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{25x^2}{(x^2+3x-4)(x+4)}\, dt$

Exercice 3

1. Calculer l'intégrale de la fonction g sur l'intervalle $[-2; 7]$:
   - g est périodique de période 3
   - $g(x) = 3$ sur l'intervalle $[0, 2[$
   - $g(x) = -1$ sur l'intervalle $[2, 3[$
2. Calculer l'intégrale $J_3 = \displaystyle\int_{-1}^{4} |x^2 - 1|\, dx$
3. Soit p un réel strictement positif. Déterminer en fonction de p : $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} te^{-pt}\, dt$

Exercice 4

1. Déterminer la nature de chaque intégrale généralisée :

   (a) $K_1 = \displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \frac{5}{(2t+3)^2+1} dt$

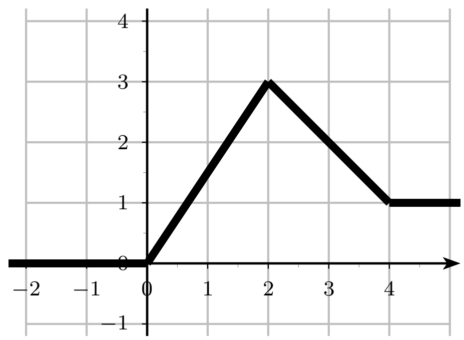
   (b) $K_2 = \displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t^3}} dt$
2. Calculer la valeur de K_1

Exercice 5 Dire si les équivalences suivantes sont vraies ou fausses

1. $\dfrac{t^2+t}{(t^3-1)(t+5)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t}$
2. $\sin(\sqrt{t}) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{t}$
3. $\cos(t)-1 \underset{0}{\sim} t$

Exercice 6

1. Tracer, sur votre copie le plus proprement possible, les représentations graphiques des fonctions suivantes :
   (a) $f(t) = \left(-\frac{1}{2}t+1\right)\mathcal{U}(t) + (t-1)\mathcal{U}(t-2) - \dfrac{t}{2}\mathcal{U}(t-4)$
   (b) $f(t) = \mathcal{U}(t-1) + 2\mathcal{U}(t-2) - 5\mathcal{U}(t-3)$
2. Déterminer une écriture de la fonction tracée ci-dessous avec des fonctions échelons :



Exercice 7 Calculer les transformées de Laplace de chacune des fonctions suivantes :

1. $f_1(t) = (3t^4 - 2t^3 + t)\mathcal{U}(t)$
2. $f_2(t) = (e^{-3t} - e^{3t})\mathcal{U}(t)$
3. $f_3(t) = \sin(3t)\,\mathcal{U}\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$
4. $f_4(t) = \mathcal{U}(t-2) - 3t^2\mathcal{U}(t-3)$

Fonction	**Transformée de Laplace**
$\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{1}{p}$
$t^n\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
$\cos(\omega t)\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$

Fonction	**Transformée de Laplace**
$e^{-at}\mathcal{U}(t)$	$\dfrac{1}{p+a}$
$f(t-\tau)\mathcal{U}(t-\tau)$	$\mathcal{L}_f(p)e^{-\tau p}$
$f+\lambda g$	$\mathcal{L}_f + \lambda\mathcal{L}_g$
$e^{-at}f(t)\mathcal{U}(t)$	$\mathcal{L}_f(p+a)$
$f'(t)$	$p\mathcal{L}_f(p) - f(0^+)$