

Mathématiques - Devoir Surveillé 4

mercredi 27 juin 2018 - Durée : 1h15

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1

1. Déterminer la nature (convergente ou divergente) des séries suivantes :

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7^n}{5^n + 3^n}$

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(\sqrt{n} + 3)^5}$

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3\pi^2 + 1}{50} \right)^n$

2. (a) Montrer que, pour tout $x > 1$, on a $0 < \ln(x) < \sqrt{x}$.

(b) Déterminer la nature de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

Exercice 2

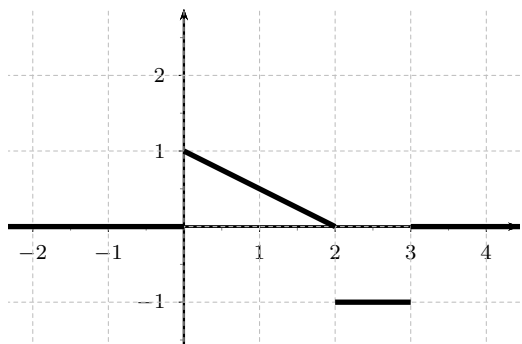
1. On sait que la série de terme général $U_n = 3^{-2n+1}$ converge. Que vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$?

2. On sait que la série de terme général $V_n = \frac{1}{n^2 + 5n + 6}$ converge. Que vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} V_n$?

3. Donner un exemple de suite (W_n) telle que la série de terme général W_n converge vers 7 : $\sum_{n=0}^{+\infty} W_n = 7$.

Exercice 3 Déterminer les transformées de Laplace des fonctions causales suivantes :

1. h est la fonction nulle sur $] -\infty; 0[\cup] 3; +\infty[$ et dont la courbe est



2. $f(t) = e^{3t} \cos(5t) \mathcal{U}(t)$

3. $g(t) = e^{3t} \mathcal{U}(t - \pi)$

4. $k(t) = e^{3t} \cos(5t) \mathcal{U}(t - \pi)$

Exercice 4 Déterminer les transformées de Laplace inverses des fonctions suivantes :

1. $F(p) = \frac{p^5 + 4p^3 + 3p - 2}{p^6}$

3. $H(p) = \frac{p + 4}{p^2 + 8p + 17}$

2. $G(p) = \frac{5}{2p^2 - 3p - 2}$

4. $K(p) = \frac{e^{-p\pi}}{p^2 + 2}$

Exercice 5 Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} f' + g' = -3f \\ f' - g' = f \\ f(0) = 1 \quad g(0) = 2 \end{cases}$$