Mathématiques

Semestre 2

Travaux Dirigés Mathématiques

Année 2024-2025

Nom :
Prénom :
Groupe :

La confiture n'est bonne que s'il faut monter sur une chaise pour attraper le pot dans le placard.
A Vialatte

Table des matières

1 Fonctions réciproques **2**

2 Systèmes linéaires et matrices **6**

3 Polynômes **9**

4 Calcul intégral - Partie 1 **13**

5 Calcul intégral - Partie 2 **17**

6 Transformée de Laplace **20**

7 Suites numériques **25**

8 DS de l'année 2023-2024 **28**

9 DS de l'année 2022-2023 **33**

10 DS de l'année 2021-2022 **39**

Chapitre 1

Fonctions réciproques

Exercice 1 ***Ensemble image***
On considère la fonction $f(t) = (t-1)^2 - 2$

1. Déterminer l'image par f de l'intervalle $]2, 3[$.
2. Déterminer l'image par f de l'intervalle $]-2, 0]$.
3. Déterminer l'image par f de l'intervalle $]-1, 3]$.
4. Déterminer l'image par f de l'intervalle $]-\infty, 2]$.

Exercice 2 ***Fonctions bijectives***

1. La fonction $t \mapsto t - 1 + e^{-t}$ est-elle bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? De $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$?
2. La fonction $t \mapsto \dfrac{2t+1}{t-4}$ est-elle bijective de $\mathbb{R}\backslash\{4\}$ dans $\mathbb{R}$?
3. Déterminer deux ensembles D et E tels que la fonction $t \mapsto \dfrac{t}{1+t^2}$ soit bijective de D dans E.

Exercice 3

1. Donner un exemple de fonction qui soit bijective de $[0; 1]$ dans $[-2; 3]$.
2. Donner un exemple de fonction qui soit bijective de $[1; +\infty[$ dans $[-2; +\infty[$.
3. Donner un exemple de fonction qui soit bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $[0, 2[$.

Exercice 4 ***Théorème de la bijection***
Démontrer que l'équation $x^3 + 3x - 5 = 0$ admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}$. Donner une méthode pour trouver une valeur approchée à 10^{-2} de cette solution.

Exercice 5 ***Fonctions réciproques***
Les questions suivantes sont indépendantes.

1. On considère la fonction $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$.
   (a) Montrer que f est une bijection de $]-1, +\infty[$ dans un ensemble que l'on déterminera.
   (b) Déterminer la fonction réciproque de la fonction f.
2. Vérifier que les fonctions $g(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$ et $h(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$ sont réciproques l'une de l'autre.

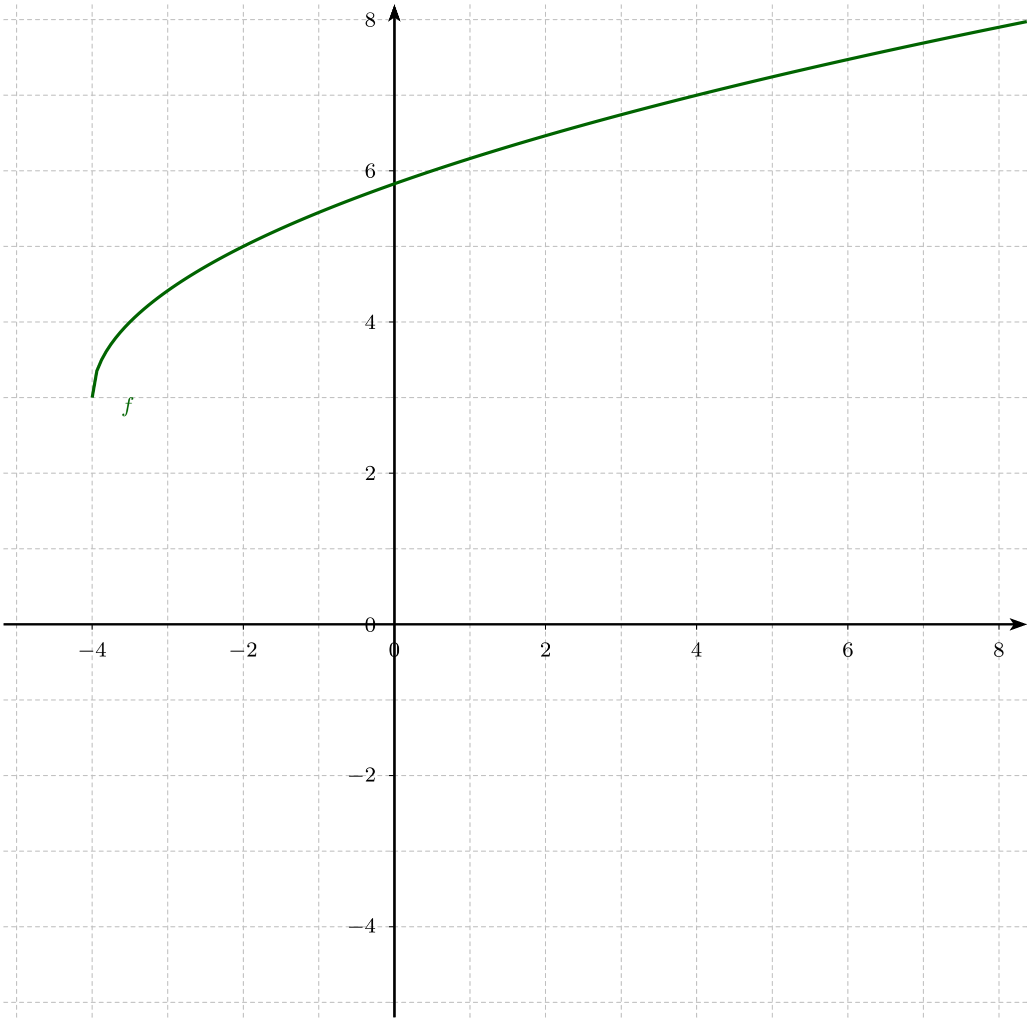
Exercice 6

1. Montrer que la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par
$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$
est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0;1[$.
2. Déterminer sa fonction réciproque.
3. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique.

Exercice 7

On considère la fonction :
$$\begin{array}{rccl} f : & [-4,+\infty[& \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & \sqrt{2x+8}+3 \end{array}$$

1. Montrer que f est une bijection de $[-4,+\infty[$ dans un ensemble E que l'on déterminera.
2. Déterminer la fonction réciproque de f.
3. Sur le graphique ci-dessous nous avons tracé la courbe représentative de f. Tracer la courbe de la réciproque de f.



Exercice 8 ***arccos, arcsin, arctan***
Calculer :

1. $\arccos(-0.5)$
2. $\arcsin(-1)$
3. $\arccos(\frac{1}{2})$
4. $\arctan(-1)$
5. $\arctan(\sqrt{3})$
6. $\arccos\big(\cos(\frac{3\pi}{4})\big)$
7. $\arccos\big(\cos(\frac{7\pi}{6})\big)$
8. $\arccos\big(\cos(\frac{31\pi}{4})\big)$
9. $\arcsin\big(\sin(\frac{\pi}{3})\big)$
10. $\arcsin\big(\sin(-\frac{4\pi}{3})\big)$
11. $\arcsin\big(\sin(\frac{17\pi}{6})\big)$

Exercice 9
Calculer :

1. $\arccos\big(\sin(\frac{3\pi}{2})\big)$
2. $\arcsin\big(\cos(\frac{5\pi}{3})\big)$
3. $\arccos\big(\sin(-\frac{\pi}{4})\big)$
4. $\arcsin\big(\cos(\frac{\pi}{5})\big)$
5. $\arctan\big(\tan(\frac{29\pi}{3})\big)$
6. $\arctan\big(\tan(\frac{4\pi}{3})\big)$
7. $\lim_{t\to+\infty} \arctan(t)$
8. $\lim_{t\to-\infty} \arctan(t)$
9. $\lim_{t\to+\infty} \arccos(t)$

Exercice 10

1. Soit $x \in [-1,1]$, simplifier les expressions :

   (a) $\sin(\arcsin(x))$, (b) $\cos(\arccos(x))$, (c) $\cos(\arcsin(x))$, (d) $\sin(\arccos(x))$.

2. Montrer que, $\forall x \in [-1,1]$,
$$\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Compléments

Exercice 11 Soit $f(x) = \arccos(\cos(x))$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer la période de f.
3. Déterminer la parité de f.
4. Tracer la courbe représentative de f

Exercice 12
On considère la fonction
$$\begin{array}{rccc} f & : &]2,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x-2} \end{array}$$

1. Montrer que f est une bijection de E_1 sur F_1, avec E_1 et F_1 deux ensembles à déterminer.
2. Soit
$$f^{-1} \ : \ E_2 \ \to \ F_2$$
   (a) Expliquer pourquoi f admet une application réciproque f^{-1}.
   (b) Déterminer les ensembles de départ E_2 et d'arrivée et F_2 de f^{-1}.
   (c) Déterminer l'application réciproque de f.
3. Déterminer g tel que $g \circ f(x) = \ln(x)$

Exercice 13

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{array}{rccl} f: & \left]\frac{2}{5};+\infty\right[& \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & \ln\left(\dfrac{1}{5x-2}\right). \end{array}$$

1. Dresser le tableau de variation de f sur $\left]\frac{2}{5};+\infty\right[$.
2. Déterminer l'ensemble E pour que f soit bijective de $\left]\frac{2}{5};+\infty\right[$ dans E.
3. Déterminer f^{-1}, la fonction réciproque de f.
4. Déterminer l'ensemble F pour que f^{-1} soit bijective de $\mathbb{R}$ dans F.

Exercice 14

1. Donner un exemple de fonction bijective de $[2,+\infty[$ dans $]-\infty,3]$.
2. Donner un exemple de fonction non bijective définie sur $\mathbb{R}$.
3. Donner un exemple de fonction bijective telle que $f(x) = f^{-1}(x)$.

Chapitre 2

Systèmes linéaires et matrices

Exercice 1 ***Méthode de Gauss***
Résoudre par la méthode de Gauss :

$$a)\begin{cases}2x-y=3\\x+y=-1\end{cases}\quad b)\begin{cases}2x+5y=-9\\x+7y=-15\end{cases}\quad c)\begin{cases}2x+y=3\\-4x-2y=5\end{cases}\quad d)\begin{cases}4x+2y=-6\\2x+y=-3\end{cases}$$

Exercice 2
Résoudre par la méthode de Gauss :

$$a)\begin{cases}2\sqrt{x}+3\sqrt{y}=5\\3\sqrt{x}+5\sqrt{y}=7\end{cases}\quad b)\begin{cases}\frac{3}{y-1}-\frac{1}{x+2}=\frac{3}{4}\\\frac{5}{y-1}+\frac{3}{x+2}=\frac{29}{12}.\end{cases}\quad c)\begin{cases}\ln\left(x^3y\right)=2\\\ln\left(\frac{x}{y^2}\right)=3\end{cases}$$

Exercice 3
Résoudre par la méthode de Gauss :

$$a)\begin{cases}x+2y+z=0\\x-2y+2z=11\\-x+6y-5z=-28.\end{cases}\quad b)\begin{cases}2x+7y-3z=8\\-3x+y+z=-4\\x-8y+2z=4.\end{cases}\quad c)\begin{cases}2x-y+3z=3\\x+3y-z=5\\-x+2y+2z=0\end{cases}$$

Exercice 4 ***Écriture matricielle d'un système***
On considère le système suivant

$$(S)\qquad\left\{\begin{array}{rcrcrcr}x&-&y&+&z&=&1\\-4x&+&3y&-&z&=&2\\2x&-&y&+&z&=&2\end{array}\right.$$

1. Écrire le système (S) sous la forme $AX=B$, avec $A\in\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$, $X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $B\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. Déterminer a, b et c pour que la matrice $M=\begin{pmatrix}-1&0&a\\b&\frac{1}{2}&c\\1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ soit la matrice inverse de A.
3. Résoudre le système (S) matriciellement, en utilisant la matrice M.

Exercice 5 ***Extrait de DS 2017***

$$(S)\left\{\begin{array}{llll}\sqrt{3}x & -\sqrt{3}y & & =6\\ x & +y & -2z & =0\\ \sqrt{2}x & +\sqrt{2}y & +\sqrt{2}z & =12\end{array}\right.$$

1. Ecrire le système (S) sous la forme $AX = B$ avec $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$, $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. (a) Donner l'expression de ${}^tA$, la transposée de A.

   (b) Calculer ${}^tAA$ puis en déduire que $A^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2}\\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2}\\ 0 & -2 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$.
3. Résoudre le système (S) par la méthode de votre choix.

Exercice 6 ***Déterminants***

Calculer le déterminant puis dire si les matrices suivantes sont inversibles :

1. $A = \begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 4\end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix}3 & -1\\ -6 & 2\end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -3 & 4 & 0\\ 0 & 1 & 5\end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix}2 & 4 & -4\\ -3 & 0 & 4\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix}$
5. $E = \begin{pmatrix}1 & 3 & -5\\ -2 & -1 & 4\\ 6 & 0 & -5\end{pmatrix}$
6. $F = \begin{pmatrix}2 & 0 & 4 & -4\\ -3 & 0 & 0 & 4\\ 2 & 2 & 5 & -6\\ 1 & 0 & -2 & 5\end{pmatrix}$
7. $G = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 4\\ -1 & 1 & 3 & -1\\ 2 & 0 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 4 & 1\end{pmatrix}$

Exercice 7 ***Résolution de système avec la matrice inverse***

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix}a & 2 & 3\\ -1 & 2 & -1\\ -3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

1. Déterminer la valeur de a pour que la matrice ne soit pas inversible.
2. On pose $a = -4$. Déterminer A^{-1}.
3. Résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{l} -4x + 2y + 3z = 8\\ -x + 2y - z = 4\\ -3x + 2y + z = -4\end{array}\right.$$

Exercice 8 ***Matrice inverse***

Déterminer les matrices inverses des matrices suivantes

1. $A_1 = \begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 4\end{pmatrix}$
2. $A_2 = \begin{pmatrix}21 & -3\\ 12 & 7\end{pmatrix}$
3. $B = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -3 & 4 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$
4. $C = \begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ -4 & 4 & 3\\ -2 & 0 & -2\end{pmatrix}$
5. $D = \begin{pmatrix}-1 & 2 & 4\\ 3 & -5 & -10\\ -5 & 8 & 17\end{pmatrix}$

Exercice 9

1. Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère le système d'inconnues x et y :

$$\begin{cases} ax + y = 2 \\ x + ay = 1 \end{cases}$$

   (a) Donner toutes les valeurs de a pour lesquelles ce système admet une solution unique.

   (b) Résoudre alors ce système en fonction de a.

2. Résoudre par la méthode de Gauss le système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + z + t = 7 \\ 2x + 3y + 3z + 2t = 14 \\ -2x - y + 2t = 2 \\ -x - z + t = -1 \end{cases}$$

Compléments

Exercice 10

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \\ -4 & 3 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les déterminants de A, B et C
2. Le système suivant admet t-il une unique solution ? (on ne demande pas de le résoudre)

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} 17x & - & 2y & = & 1 \\ 3x & + & 8y & = & 2 \end{array} \right.$$

3. La matrice B est elle inversible ? Si oui, déterminer B^{-1}.

Exercice 11 Les questions suivantes sont indépendants :

1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$ et la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ sont-elles l'inverse l'une de l'autre ?
2. Soit la matrice $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Existe-t-il une matrice D telle que $C \times D$ et $C + D$ existent ?
3. Soit la matrice $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

   (a) Déterminer a, b et c pour que $F = \begin{pmatrix} a & -2 & 5 \\ -3 & b & 2 \\ 4 & c & -2 \end{pmatrix}$ soit l'inverse de E.

   (b) En déduire les solutions du système : $\left\{ \begin{array}{cccc} & y & +z & = & 1 \\ & 2x & +5z & = & 1 \\ x & +2y & +4z & = & 6 \end{array} \right.$

Chapitre 3

Polynômes

Exercice 1 ***Degré de polynômes***
Déterminer le degré des polynômes suivants :

1. $P_1(X) = (X-1)^2(X+1)$
2. $P_2(X) = (X-1)^2(X^2+1)^2$
3. $P_3(X) = X(X^3+1)^2(X^2+2X+1)$
4. $P_4(X) = X^2(X^2+2) + X^4 + 2X + 1$
5. $P_5(X) = X(X^3+1)^2 - X^7 + 2X + 1$
6. $P_6(X) = P_1(P_2(X))$
7. $P_7(X) = P_1(X)P_2(X)$
8. $P_8(X) = P_1(X) + P_2(X)$

Exercice 2 ***Factorisation dans*** $\mathbb{R}$
Factoriser dans $\mathbb{R}$ les polynômes suivants :

1. $P_1(X) = X^2 - 2X - 3$
2. $P_2(X) = X^3 - 7X^2 + 12X$
3. $P_3(X) = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$
4. $P_4(X) = X^3 + 2X^2 - 4X - 5$
5. $P_5(X) = X^4 - 64$
6. $P_6(X) = X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 4$
7. $P_7(X) = (X-i)(X+i)(X-1+i)(X-1-i)$

Exercice 3 ***Factorisation dans*** $\mathbb{C}$
Soit $P(X) = X^3 + X^2 - X + 1$.

1. Montrer que $1+2i$ est racine de P.
2. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 4 ***Factorisation dans*** $\mathbb{C}$
Soit $P(X) = X^3 - (4-3i)X^2 - 6iX + (7-9i)$.

1. Montrer que P admet une racine réelle r si et seulement si r est solution de $r^3 - 4r^2 + 7 = 0$ et de $3r^2 - 6r - 9 = 0$.
2. P admet-il une racine réelle ?

Exercice 5 ***Factorisation dans*** $\mathbb{C}$
Soit $P(X) = X^3 - (2-2i)X^2 + (2-3i)X + (5-5i)$.

1. Trouver une racine réelle de P.
2. Les racines complexes de P sont-elles conjuguées ? Pourquoi ?
3. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 6 ***Factorisation dans*** $\mathbb{C}$
Posons $P(X) = X^3 + (-3-4i)X^2 + (-3+8i)X + 5$.

1. Vérifier que i est racine de P. En déduire un polynôme P_1 tel que $P(X) = (X-i)P_1(X)$.
2. Trouver les racines complexes z_1 et z_2 de P_1 et en déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$.
3. Soit Q un polynôme de degré 4 à coefficients réels qui admet z_1 et z_2 comme racines. Ecrire la factorisation de Q dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 7 ***Racines multiples***

1. Montrer que le polynôme $P(X) = X^3 + X^2 - 16X + 20$ admet le nombre 2 comme racine de multiplicité 2. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $P(X) = X^4 - 5X^3 + 9X^2 - 7X + 2$. On remarque que $P(1) = 0$: déterminer la multiplicité de 1. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer a pour que le polynôme $P(X) = 2X^2 - X + a - 2$ admettent une racine de multiplicité 2. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 8

1. Donner un polynôme P_1 à coefficients réels qui admet $1+i$ et 2 comme racines.
2. Donner un polynôme P_2 de degré 4 qui admet 2 comme racine double et -1 comme racine simple.
3. Donner un polynôme P_3 vérifiant ces 4 conditions suivantes :
   - -2 est racine simple de P
   - 1+i est racine de multiplicité 2 de P
   - le reste de la division euclidienne de P par X^2+1 est nul
   - P est à coefficient réels

Exercice 9 ***Factorisation dans*** $\mathbb{R}$ ***et*** $\mathbb{C}$
On considère le polynôme $P(X) = X^3 + X^2 - 4X + 6$.

1. Montrer que $1+i$ est une racine de P.
2. Le polynôme P admet-elle une autre racine complexe ? Si oui, que vaut-elle ?
3. Effectuer la division euclidienne de P par $X+3$
4. (a) Les racines de P dans $\mathbb{C}$, dans $\mathbb{R}$.
   (b) La factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$, dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 10 ***Divisions Euclidiennes***
Effectuer la division euclidienne de :

1. $P(X) = X^4 - X^3 + 2X^2 + X - 1$ par $D(X) = X^2 + X - 1$.
2. $P(X) = X^5 + X + 1$ par $D(X) = X^3 - X^2 + 1$.
3. $P(X) = X^3 + 3X - 2i$ par $D(X) = X - i$.

Exercice 11 ***Racines multiples - Division Euclidienne***
Soit le polynôme $P(X) = X^6 - 5X^4 + 8X^3 - 9X^2 + aX + b$, où a et b sont deux réels.

1. Déterminer a et b pour que 1 soit racine de multiplicité $k \geq 2$ du polynôme P.
   Désormais, a et b auront ces valeurs.
2. Quel est alors l'ordre de multiplicité k de 1 comme racine de P ?
3. Vérifier ce résultat en effectuant la division euclidienne de P par $(X-1)^k$ pour les valeurs a et b trouvées. Préciser la valeur du quotient Q.
4. Vérifier que i est racine de Q.
5. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 12 ***Extrait de DS 2019***

On souhaite étudier la propriété suivante :

Le produit de 4 nombres entiers qui se suivent auquel on ajoute 1 est toujours le carré d'un nombre entier $(\star)$

Exemple : $4 \times 5 \times 6 \times 7 + 1 = 841 = 29^2$

1. Soient N un nombre entier et $P(N)$ le résultat du produit de N par les 3 entiers suivants auquel on ajoute 1. Montrer que
$$P(N) = N^4 + 6N^3 + 11N^2 + 6N + 1$$
2. Poser la division euclidienne de P par $N^2 + 3N + 1$.
3. Dire si la propriété $(\star)$ est vraie ou fausse puis donner la valeur de $\sqrt{15 \times 16 \times 17 \times 18 + 1}$.

Exercice 13 ***Interpolation polynômiale***

1. Soient les matrices A et B :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & \alpha \\ \beta & 4 & -1.5 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$
Déterminer α et β pour que B soit l'inverse de A.
2. Résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} a + b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 6 \\ 9a + 3b + c = 12 \end{cases}$$
3. Déterminer le polynôme P sachant que : P est de degré 2, $P(1) = 2$, $P(2) = 6$ et $P(3) = 12$.

Exercice 14 ***D.E.S.***

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ les fractions rationnelles :

1. $F_1(X) = \dfrac{4}{(X-5)(X+3)}$
2. $F_2(X) = \dfrac{X^2+1}{X(X-2)(X+4)}$
3. $F_3(X) = \dfrac{X^3}{X^2+2X-15}$

Exercice 15 ***D.E.S.***

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ les fractions rationnelles :

1. $F_1(X) = \dfrac{X^2}{(X-1)^2(X+4)}$
2. $F_2(X) = \dfrac{X^2+1}{X^4-2X^3}$
3. $F_3(X) = \dfrac{1}{X^2(X+2)^2}$

Exercice 16 ***D.E.S.***

Décomposer en en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ les fractions rationnelles :

1. $F_1(X) = \dfrac{3X+2}{(X^2+1)(X-2)}$
2. $F_2(X) = \dfrac{X^3+2X}{(X^2+X+1)(X^2-7X+8)}$
3. $F_3(X) = \dfrac{X^4}{X^3-2X^2+X-2}$

Exercice 17 ***Extrait de DS 2018***

1. Donnez **la forme** de la décomposition en élément simples (DES) dans $\mathbb{R}[X]$ des fractions rationnelles suivantes :

(a) $F_1(X) = \dfrac{X^3}{(1+X)(X-2)}$ (b) $F_2(X) = \dfrac{2}{X^3+X}$ (c) $F_3(X) = \dfrac{2X+1}{X^3(X^2+1)}$

2. Calculez les constantes dans la DES de F_1 et F_2.

Compléments

Exercice 18 Soit la fonction $F(X) = \dfrac{X^4+4X^3+5X^2+3X-1}{X^3+2X^2+X}$.

1. Déterminer les polynômes $E(X)$ et $D(X)$ tels que $F(X) = E(X) + \dfrac{D(X)}{X^3+2X^2+X}$ avec $deg(D) < 3$.
2. Factoriser le polynôme $Q(X) = X^3+2X^2+X$.
3. Donner la forme de la D.E.S. de F.
4. Donner la décomposition en éléments simples de F.

Exercice 19 Répondre par Vrai ou Faux en justifiant.

1. Il n'existe pas de polynôme de degré 5 à coefficients réels qui admette 3 comme racine triple et i comme racine double.
2. Le reste de la division euclidienne de $P(X) = X^6 - 3X^2 - 3$ par $X-1$ est nul.
3. Soit P un polynôme. Si $P'(3) = 0$ alors 3 est racine de P de multiplicité au moins 2.
4. Il existe un polynôme P tel que $P(X^3+1) = X^3P(X)$.
5. La forme de la D.E.S. de $F(X) = \dfrac{2X-7}{(X+1)(X^2+3X+1)}$ est $F(X) = \dfrac{a}{X+1} + \dfrac{b}{X^2+3X+1}$

Exercice 20 Soit $P(X) = X^4+2X^3+2X^2+2X+1$.

1. Montrez que -1 est racine double de P.
2. Effectuez la division euclidienne de P par $X-i$.
3. Sans poser la division euclidienne de P par $X+i$, justifiez pourquoi le reste est forcément nul.
4. Déterminez la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 21 Considérons un polynôme P défini par

$$P(X) = 2X^5 - 3X^4 - 8X^3 + 5X^2 + \alpha X + \beta$$

1. Déterminer les valeurs de α et β pour que 2 et -1 soient racines de P.
   Pour les questions suivantes on remplacera α et β par les valeurs obtenues à la quetion 1.
2. Montrer que les racines 2 et -1 sont de multiplicité 2.
3. Sachant que $(X-2)^2(X+1)^2 = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 4X + 4$, poser la division euclidienne de P par $(X-2)^2(X+1)^2$.
4. En déduire la forme factorisée de P dans $\mathbb{R}[X]$.

Chapitre 4

Calcul intégral - Partie 1

Exercice 1 ***Calcul de surface***

1. On considère les 3 fonctions suivantes :

$$f_1(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \in]-\infty; 0[\\ 2 \text{ si } t \in [0,3[\\ 0 \text{ si } t \in [3, +\infty[\end{cases} \quad f_2(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \in]-\infty; -1[\\ 2 \text{ si } t \in [-1,2[\\ -2 \text{ si } t \in [2,3[\\ 0 \text{ si } t \in [3, +\infty[\end{cases} \quad f_3(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \in]-\infty; -1[\\ t+1 \text{ si } t \in [-1,0[\\ -t+1 \text{ si } t \in [0,1[\\ 0 \text{ si } t \in [1, +\infty[\end{cases}$$

   Calculer $I_1 = \displaystyle\int_{-5}^{5} f_1(t)dt$, $I_2 = \displaystyle\int_{-5}^{5} f_2(t)dt$ et $I_3 = \displaystyle\int_{-5}^{5} f_3(t)dt$,

2. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{5} |t-3| \,\mathrm{d}t$

Exercice 2 ***Propriétés graphiques***

Dire si les égalités sont vraies ou fausses :

1. $\displaystyle\int_{-2\pi}^{\pi} |\sin(t)| dt = 3 \int_0^{\pi} \sin(t) dt,$
2. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^5(3t) dt = 0$
3. $\displaystyle\int_0^{\pi} 2 + \sin(t) dt = 2 + \int_0^{\pi} \sin(t) dt.$
4. $\displaystyle\int_{-\pi\sqrt{3}}^{\pi\sqrt{3}} 14t^7 + 23t^5 - t^3 - \frac{4t}{7} \,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t^3 - 3t + 1 dt = 1$

Exercice 3 ***Calcul de surface***

Tracer les courbes d'équations $y = 2x$, $y = \dfrac{x}{4}$ et $y = \dfrac{2}{x^2}$ sur le quadrant $x > 0$, $y > 0$. Calculer l'aire de la surface centrale délimitée par ces 3 courbes.

Exercice 4 ***Calculs de primitives***

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-1}^{2} 2t^3 + 5t^2 - 4t + 1 \,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_{-2}^{2} t^5 + 3t^2 + 4t \,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_1^2 t(t^2+1)^2 \,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t^3} \,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_1^2 \frac{t}{\sqrt{t^2+3}} \,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{7t} \,\mathrm{d}t$
7. $\displaystyle\int_0^1 e^{\frac{1}{3}t} \,\mathrm{d}t$
8. $\displaystyle\int_0^5 e^{-\frac{t}{5}} \,\mathrm{d}t$
9. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{4t} - e^{-4t}}{2} \,\mathrm{d}t$
10. $\displaystyle\int_1^2 \frac{3}{5t-1} \,\mathrm{d}t$
11. $\displaystyle\int_1^2 \frac{3t^2+2t+1}{t^3+t^2+t+2} \,\mathrm{d}t$
12. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(5t) \,\mathrm{d}t$
13. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(3t) \,\mathrm{d}t$

Exercice 5 ***Calculs de primitives***
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} t\cos(t^2)\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^1 t^2e^{t^3}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(t)}{\cos^3(t)}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(3t)\cos^4(3t)\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{e^{\cos t}}\,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int_0^1 2^t\,\mathrm{d}t$
7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\frac{1}{2}}{4t^2+1}\,\mathrm{d}t$
8. $\displaystyle\int_{-3}^2 |t^2-4|\,\mathrm{d}t$
9. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin(x)\ln(t)}{e^{7\cos t}}\,\mathrm{d}x$

Exercice 6 ***Attention à la variable !***
Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1=\displaystyle\int_1^e \frac{t}{x}dx$
2. $I_2=\displaystyle\int_1^e \frac{t}{x}dt$
3. $I_3=\displaystyle\int_0^1 e^{\frac{t}{x}}dt$
4. $I_4=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2t)dx$
5. $I_5=\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(2t)+xdt$

Exercice 7 ***D.E.S***
On souhaite calculer $I=\displaystyle\int_0^2 \frac{t^2+1}{(t+1)(t^2+4)}dt$

1. Déterminer une primitive de $f(t)=\dfrac{1}{t^2+4}$.
2. Déterminer une primitive de $g(t)=\dfrac{t-1}{t^2+4}$.
3. Montrer que
$$\frac{t^2+1}{(t+1)(t^2+4)}=\frac{3(t-1)}{5(t^2+4)}+\frac{2}{5(t+1)}.$$
4. Calculer I.

Exercice 8 ***D.E.S***
Calculer les intégrales suivantes :

1. $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{t+1}dt$
2. $J=\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2+1}{(t+1)(t^2-4)}dt$
3. $K=\displaystyle\int_4^5 \frac{t^3+2}{t^2-5t+6}dt$
4. $L=\displaystyle\int_0^1 \frac{3t+1}{(t+1)^2}dt$
5. $M=\displaystyle\int_0^1 \frac{3t+1}{(t+2)(t^2+1)}dt$

Exercice 9 ***Linéarisation***
Calculer les intégrales suivantes :

1. $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)\cos(3t)\mathrm{d}t$
2. $J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t)\mathrm{d}t$
3. $K=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(2t)\cos(5t)\mathrm{d}t$

Exercice 10 ***I.P.P.***
A l'aide d'une (ou plusieurs) intégration(s) par parties, calculer :

1. $I = \displaystyle\int_0^1 (1+t)e^{2t}\mathrm{d}t$
2. $J = \displaystyle\int_0^{\pi} t^2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t$
3. $K = \displaystyle\int_0^1 (1+4t)\ln(2t+1)\,\mathrm{d}t$
4. $L = \displaystyle\int_1^e \ln(t)\mathrm{d}t$
5. $M = \displaystyle\int_0^1 2t\arctan(t)\mathrm{d}t$
6. $N = \displaystyle\int_0^{\pi} e^t\sin(t)\mathrm{d}t$

Exercice 11 ***I.P.P.***

1. Calculer une primitive de $f(t) = \dfrac{2t}{(t^2-1)^2}$.
2. Calculer $I = \displaystyle\int_2^3 \frac{1}{t(t^2-1)}\mathrm{d}t$.
3. Calculer $J = \displaystyle\int_2^3 \frac{2t\ln t}{(t^2-1)^2}\mathrm{d}t$.

Exercice 12 ***Changement de variable***
Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_0 = \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4t^2+4t+5}\mathrm{d}t$ en posant $x = t + \dfrac{1}{2}$
2. $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin^3(t)\mathrm{d}t$ en posant $u = \cos(t)$
3. $I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t)\sin^2(t)\mathrm{d}t$
4. $I_3 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$ en posant $t = \cos(x)$
5. $I_4 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^u}\mathrm{d}u$ en posant $t = \mathrm{e}^u$

Exercice 13 ***Changement de variable***
On souhaite calculer $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t}\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\mathrm{d}t$

1. On pose $u = \sqrt{\dfrac{t-1}{t+1}}$. Exprimer t en fonction de u.
2. En déduire une relation entre dt et du.
3. Donner l'expression de l'intégrale I en fonction de la variable u.
4. Calculer I.

Compléments

Exercice 14
On pose $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{1+2\sin(t)}dt$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2t)}{1+2\sin(t)}dt$.

1. Calculer I.
2. Calculer $I+J$.
3. En déduire J.

Exercice 15 Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\mathrm{d}x$
2. $J = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^4(x)\cos(x)\mathrm{d}x$
3. $L = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(x)\mathrm{d}x$
4. $M = \displaystyle\int_0^2 |t^2 - 3t + 2|\mathrm{d}t$
5. $N = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\mathrm{d}x$
6. $P = \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx$
   (on pourra effectuer le changement de variable $x = \sin(u)$)

Exercice 16 Soit $f(x) = \dfrac{x-1}{(x+1)(x^2+2x+2)}$

1. Faire la D.E.S. de $f(x)$
2. Montrer qu'une primitive de $\dfrac{1}{x^2+2x+2}$ est $\arctan(x+1)$.
3. En déduire une primitive $F(x)$ de $f(x)$.

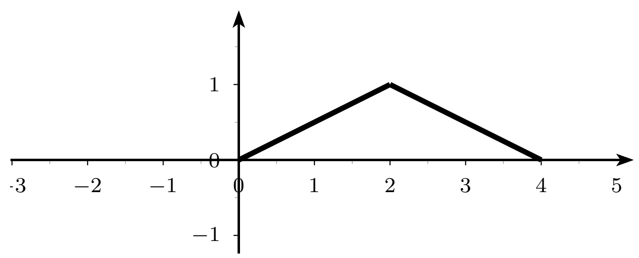
Exercice 17

1. Montrer que $\dfrac{x^3}{1+x^2} = x - \dfrac{x}{1+x^2}$ puis déterminer une primitive de $\dfrac{x^3}{1+x^2}$
2. En effectuant une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2\arctan(x)\mathrm{d}x$
3. Aurait-on pu prévoir le résultat précédent ?

Exercice 18

1. Montrer que $2t^2 + 17t + 36 = (2t+9)(t+4)$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_1^8 \frac{t}{2t^2+17t+36}dt = -4\ln(12) - \frac{9}{2}\ln(11) + 13\ln(5)$
3. Calculer $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{x^5}{2x^6+17x^3+36}dx$ en posant le changement de variable $t = x^3$.

Exercice 19
Soit la fonction $s(t)$ définie sur $[0;4]$ par :



1. Déterminer $\displaystyle\int_0^4 s(t)dt$
2. On note s_2 la fonction impaire définie sur $[-4;4]$ telle que $s_2(t) = s(t)$ sur $[0;4]$.
   Déterminer $\displaystyle\int_{-4}^{4} s_2(t)dt$
3. On note s_3 la fonction paire définie sur $[-4;4]$ telle que $s_3(t) = s(t)$ sur $[0;4]$.
   Déterminer $\displaystyle\int_{-4}^{4} s_3(t)dt$

Chapitre 5

Calcul intégral - Partie 2

Exercice 1 ***Intégrales généralisées***

1. (a) Soit $X > 1$. Calculer $\displaystyle\int_1^X \frac{1}{(2t+1)^2+1}\,dt$

   (b) En déduire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(2t+1)^2+1}\,dt$ est convergente.

2. (a) Soit $X > 2$. Calculer $\displaystyle\int_2^X \frac{1}{(t+3)(t-1)}\,dt$

   (b) En déduire que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{(t+3)(t-1)}\,dt$ est convergente.

3. (a) Soit $X > 2$. Calculer $\displaystyle\int_2^X \frac{4t^2-t+6}{(t^2+2)(t-1)}\,dt$

   (b) En déduire que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{4t^2-t+6}{(t^2+2)(t-1)}\,dt$ est divergente.

Exercice 2 ***Équivalence***

Dans chacun des cas suivants, dire si l'équivalent est vrai ou faux en justifiant vos réponses.

1. $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$
2. $\cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} x$
3. $x^2 + x - 2 \underset{0}{\sim} x - 1$
4. $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$
5. $2\cos(x) - 1 \underset{\pi/3}{\sim} 3x - \pi$

Exercice 3 ***Équivalence***

Compléter les équivalences avec une fonction « simple » :

1. $\dfrac{t^2+t-2}{t^5-3t+1} \underset{+\infty}{\sim}$
2. $\sin\left(\dfrac{1}{t^2}\right) \underset{+\infty}{\sim}$
3. $\ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right) \underset{+\infty}{\sim}$
4. $\dfrac{t^3+t}{t^5-3t^2} \underset{0}{\sim}$

Exercice 4 ***Critères de convergence***

Pour chacune des intégrales suivantes dire si elle est convergente ou divergente :

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t}}\,dt$

4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{t^3+t}dt,$

5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\sin\left(\frac{1}{t}\right)\,dt$

6. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt,$

7. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt,$

8. $\displaystyle\int_1^{+\infty} t\sin\left(\frac{1}{t}\right)dt.$

Exercice 5 ***Un peu de logique***

Les affirmations suivantes sont fausses. Trouver dans chacun des cas un contre-exemple le prouvant.

1. $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t)=0 \Rightarrow \int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.
2. Soit f et g deux fonctions telles que $0 \leq f(t) \leq g(t)$ pour tout $t \geq 1$. Alors :

$$\int_1^{+\infty} g(t)\,dt \text{ diverge } \Rightarrow \int_1^{+\infty} f(t)\,dt \text{ diverge.}$$

Exercice 6 ***Calcul d'intégrales généralisées***

1. Justifier que $\displaystyle I=\int_1^{+\infty}\frac{1}{t(t^2+1)}\mathrm{d}t$ est convergente et calculer sa valeur.
2. Justifier que $\displaystyle I=\int_0^{+\infty}\frac{t\mathrm{d}t}{1+t^4}$ est convergente et calculer sa valeur.

Exercice 7 ***Calcul d'intégrales généralisées***

Soit $a>1$. On note :

$$I(a)=\int_1^a \frac{\arctan t}{t^2}dt.$$

Calculer $I(a)$ et étudier la convergence de $\displaystyle I=\int_1^{+\infty}\frac{\arctan t}{t^2}dt$. On donnera sa valeur, le cas échéant.

Exercice 8 ***Comparaison***

1. (a) Montrer que $\forall t \in [1,\infty[$, $0 \leq \ln t \leq t$.

   (b) Etudier la convergence de $\displaystyle I=\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^3}dt.$

2. (a) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^t > t$.

   (b) Etudier la convergence de $\displaystyle J=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{1+t}dt.$

3. Etudier la convergence de $\displaystyle K=\int_1^{+\infty}\frac{\ln(t)}{t+1}dt,$

Compléments

Exercice 9

1. Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

   (a) $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2+t+1}\right) dt$ (b) $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{t}+1\right)^2}{t+2} dt$

2. On souhaite étudier la nature de l'intégrale : $K = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t^2+1)}{t^3} dt$

   (a) Montrer que, pour tout $t \geq 1$ on a : $0 \leq \ln(t^2+1) \leq t$

   (b) En déduire la nature de K.

Exercice 10 Les questions suivantes sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.

1. (a) Soit $X > 1$. Calculez $\displaystyle\int_1^X e^{-t} dt$.

   (b) En déduire la nature⋆ de $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}|\cos(t)| dt$.

2. (a) Soit $X > e$. Calculez $\displaystyle\int_e^X \frac{1}{t\ln^2(t)} dt$ en posant le changement de variable $u = \ln(t)$.

   (b) En déduire la nature⋆ de $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{t\ln^2(t)} dt$.

3. Déterminer la nature⋆ des intégrales suivantes :

   (a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t+1}{(t+3)(t+1)} dt$, (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t}} dt$, (c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sqrt{t}\sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$.

4. (a) Soit $X > 1$. Montrez que :

$$\int_1^X \frac{\ln(t)}{t^2} dt = \left[-\frac{\ln(t)}{t}\right]_1^X + \int_1^X \frac{1}{t^2} dt.$$

   (b) En déduire la nature⋆ de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} dt$.

Exercice 11 Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Donner la nature de l'intégrale I (convergente ou divergente) :

$$I = \int_2^{+\infty} \frac{t^3 - 7t + 3}{t(t+1)(t^2-3)} dt$$

2. On souhaite étudier la nature de l'intégrale : $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^3} dt$.

   (a) En étudiant les variations de la fonction $g(t) = \arctan(t)$,
   montrer que $\forall t \geq 1$, on a $0 \leq \arctan(t) \leq \dfrac{\pi}{2}$.

   (b) En déduire la nature de J.

Chapitre 6

Transformée de Laplace

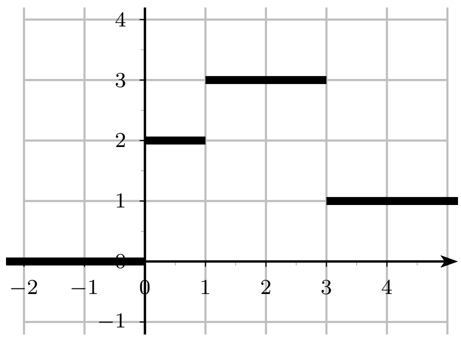
Exercice 1 ***Fonction échelon***

On rappelle que la fonction *Echelon de Heaviside* est définie par : $\mathcal{U}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$

1. Représenter la fonction *échelon retardé* : $t \mapsto \mathcal{U}(t-2)$ et la fonction *échelon avancé* : $t \mapsto \mathcal{U}(t+3)$.
2. Représenter les fonctions
   (a) $f(t) = \mathcal{U}(t) - 2\mathcal{U}(t-1) + \mathcal{U}(t-2)$.
   (b) $g(t) = \mathcal{U}(t-1) + \mathcal{U}(t-4)$.

Exercice 2 ***Exprimer une fonction en utilisant la fonction échelon***

Voici la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:



1. Exprimer $f(t)$ en fonction de t en utilisant la fonction échelon unité.

Exercice 3 ***Fonction échelon***

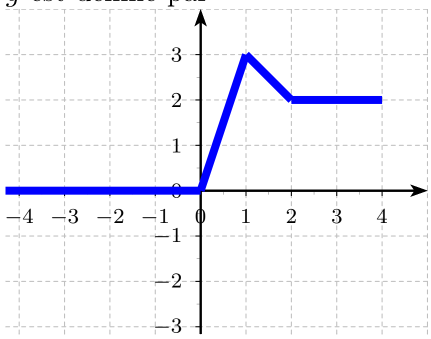
Écrire chaque fonction sans utiliser la fonction $\mathcal{U}$; puis dessiner leur courbe représentative.

1. $f_1(t) = 3\mathcal{U}(t) + \mathcal{U}(t-1) + 3\mathcal{U}(t-2)$
2. $f_2(t) = 2\mathcal{U}(t-1) - t\mathcal{U}(t-2) + (t-2)\mathcal{U}(t-4)$
3. $f_3(t) = \sin(t)\mathcal{U}(t) - \sin(t)\mathcal{U}(t-\pi)$
4. $f_4(t) = \cos(2t)\mathcal{U}\left(t - \frac{\pi}{2}\right) - \cos(2t)\mathcal{U}(t-\pi)$
5. $f_5(t) = (t-1)\mathcal{U}(t-1) + 2\mathcal{U}(t-2) - (2t-1)\mathcal{U}(t-3)$
6. $f_6(t) = t - t\mathcal{U}(t)$

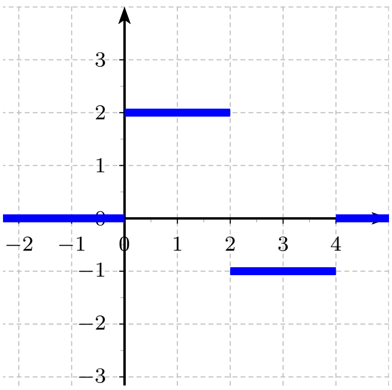
Exercice 4 ***Exprimer une fonction en utilisant la fonction échelon***
Définir chacune des fonctions suivantes par une seule égalité (et donc en utilisant la fonction $\mathcal{U}(t)$) :

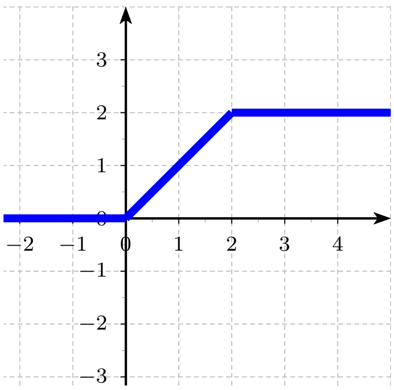
1. $f(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \in]-\infty; 0[\\ t \text{ si } t \in [0, 1[\\ 1 \text{ si } t \in [1, 2[\\ -t + 4 \text{ si } t \in [2, 4[\\ 0 \text{ si } t \in [4, +\infty[\end{cases}$

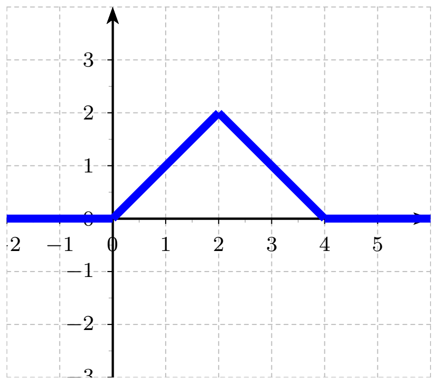
2. g est définie par



Exercice 5 ***Calcul de transformées de Laplace***
En revenant à la définition, calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes :

1. 

2. 

3. 

Exercice 6 ***Calcul de transformées de Laplace***
Calculer les transformées de Laplace de chacune des fonctions suivantes :

1. $f_1(t) = (3t^2 - 2t + 1)\mathcal{U}(t)$
2. $f_2(t) = (4t^4 + 3t^3 + 5t^2 + 2)\mathcal{U}(t)$
3. $f_3(t) = e^{-3t}\mathcal{U}(t)$
4. $f_4(t) = e^{-5t+2}\mathcal{U}(t)$
5. $f_5(t) = (e^{-3t} - e^{3t})\mathcal{U}(t)$
6. $f_6(t) = \sin(3t)\mathcal{U}(t)$
7. $f_7(t) = (\sin(3t) - 2\cos(3t))\mathcal{U}(t)$
8. $f_8(t) = \dfrac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}\mathcal{U}(t)$
9. $f_9(t) = \cos(50\pi t + \frac{\pi}{6})\mathcal{U}(t)$

Exercice 7 ***Calcul de transformées de Laplace - Retard***
Calculer les transformées de Laplace de chacune des fonctions suivantes :

1. $f_1(t) = t\mathcal{U}(t-7)$
2. $f_2(t) = t^2\mathcal{U}(t-2)$
3. $f_3(t) = e^{-t}\mathcal{U}(t-3)$
4. $f_4(t) = (t^2 + 2t)\mathcal{U}(t-4)$
5. $f_5(t) = \cos(t)\mathcal{U}(t-\pi)$
6. $f_6(t) = \cos(2t)\mathcal{U}\left(t - \dfrac{\pi}{3}\right)$
7. f_7 est définie par la courbe 2 de l'exercice 5.

Exercice 8 ***Calcul de transformées de Laplace***

Calculer la transformée de Laplace des fonctions suivantes :

1. $f_1(t) = (2t^2 - 3t)e^{-4t}\mathcal{U}(t)$
2. $f_2(t) = e^{-t}\sin(3t)\mathcal{U}(t)$
3. $f_3(t) = e^{3t}\cos(2t)\mathcal{U}(t)$
4. $f_4(t) = e^{-t}(t+1)\mathcal{U}(t-2)$
5. $f_5(t) = \left(t^3e^{-3t} + 4t^2e^{2t} + 7\right)\mathcal{U}(t-2)$

Exercice 9

Déterminer les transformées de Laplace des fonctions causales définies par :

1. $$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < 4 \\ 0 & \text{si } t \geq 4 \end{cases}$$
2. $$g(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < 5 \\ 5 & \text{si } t \geq 5 \end{cases}$$

Exercice 10 ***Transformées de Laplace inverse***

Calculer les transformées de Laplace inverses des fonctions suivantes :

1. $F_1(p) = \dfrac{2}{p+1}$
2. $F_2(p) = \dfrac{1}{p^2-1}$
3. $F_3(p) = \dfrac{p^2+5p+2}{p^3}$
4. $F_4(p) = \dfrac{p^4+2p^2+2p+1}{p^5}$
5. $F_5(p) = 7\dfrac{e^{-p}}{p}$
6. $F_6(p) = -4\dfrac{e^{-2p}}{p+3}$
7. $F_7(p) = 3\dfrac{1}{(p-2)^2}$
8. $F_8(p) = 2\dfrac{p+1}{p^2+2p+2}$

Exercice 11

Calculer les transformées de Laplace inverses des fonctions suivantes :

1. $F_1(p) = \dfrac{3p+4}{p^2+3p-4}$
2. $F_2(p) = \dfrac{1}{p^2(p+1)}$
3. $F_3(p) = \dfrac{(p-\omega)^2}{p(p^2+\omega^2)}$
4. $F_4(p) = \dfrac{e^{-2p}}{p-1}$
5. $F_5(p) = \dfrac{e^{-p\pi}}{p^2+4p+5}$
6. $F_6(p) = \dfrac{e^{-p}}{(p^2+2p+2)(p+1)}$
7. $F_7(p) = \dfrac{2}{(p+4)^4} - \dfrac{e^{-\frac{\pi}{3}p}}{p^2+4}$

Exercice 12 ***Équation différentielle d'ordre 1***

On considère l'équation différentielle d'ordre 1 suivante

$$\begin{cases} y(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ 2y'(t) + y(t) = e^{-2t}\mathcal{U}(t) & \text{pour } t > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{6.1}$$

1. Résoudre cette équation avec la méthode vue au semestre 1 (solutions = solution particulière + solutions de l'équation homogène).
2. **Détermination de la transformée de Laplace de y :**

   On note F la transformée de y.

   (a) Rappeler la formule de $\mathcal{L}_{f'(t)}(p)$

(b) Appliquer la transformée de Laplace à l'équation différentielle (6.1) et en déduire l'expression de $F(p)$ en fonction de p.

3. **Détermination de y :**

(a) Vérifier que $F(p) = -\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{p+2} + \dfrac{8}{3} \times \dfrac{1}{2p+1}$.

(b) Déduire du résultat précédent l'expression de la solution $y(t)$ pour t positif.

Exercice 13 ***Équation différentielle d'ordre 2***

L'étude d'un mouvement amorti amène à considérer la fonction f telle que :

$$\begin{cases} y(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = e^{-t}\mathcal{U}(t) & \text{pour } t > 0 \\ y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 0. & \end{cases} \tag{6.2}$$

On note F la transformée de y.

1. Donner la formule de $\mathcal{L}_{f''(t)}(p)$.
2. Appliquer la transformée de Laplace à l'équation différentielle (6.2) et en déduire l'expression de $F(p)$ en fonction de p.
3. Vérifier que $F(p) = \dfrac{1}{p+1} + \dfrac{1}{(p+1)^2+1}$.
4. Déduire du résultat précédent l'expression de $y(t)$ pour t positif.

Exercice 14 ***Systèmes d'équations différentielles***

Résoudre les systèmes d'équations différentielles :

1. $$\begin{cases} y'(t) + x(t) = \sin(t)\mathcal{U}(t), \\ x'(t) - y(t) = \cos(t)\mathcal{U}(t), \\ y(0) = 1, \quad x(0) = 0. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} f'(t) = 4f(t) + g(t), \\ g'(t) = f(t) + 4g(t), \\ f(0) = 0, \quad g(0) = 1. \end{cases}$$

Exercice 15 ***Équation différentielle d'ordre 2***

1. Résoudre avec la méthode de la transformée de Laplace l'équation différentielle

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

pour $x \geq 0$ avec les conditions initiales $y(0) = 3$ et $y'(0) = -7$.

2. Résoudre avec la méthode de la transformée de Laplace l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + y = e^{-t}\mathcal{U}(t)$$

pour $t \geq 0$ avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Compléments

Exercice 16 On considère l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y'(t) + 2y(t) = (6\cos(2t) + 6\sin(2t))\mathcal{U}(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que la transformée de Laplace de y est :

$$Y(p) = \frac{p^2 + 6p + 16}{(p+2)(p^2+4)}$$

2. Déterminer a, b et c tels que $Y(p) = \dfrac{a}{p+2} + \dfrac{bp+c}{p^2+4}$.
3. En déduire, l'expression de $y(t)$.

Exercice 17

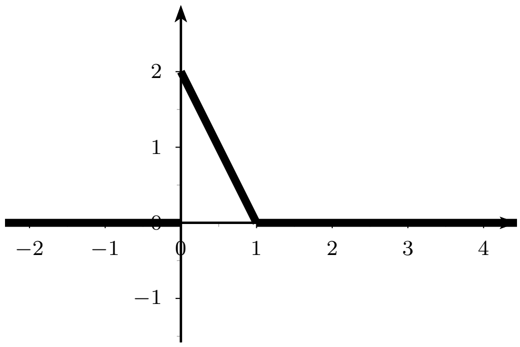
1. Déterminer les transformées de Laplace des fonctions causales suivantes :

   (a) $f_1(t) = \dfrac{1-e^{3t}}{4}\mathcal{U}(t)$

   (b) $f_2(t) = \dfrac{1-e^{3t}}{4}\mathcal{U}(t-2)$

   (c) $f_3(t) = e^{-5t}\dfrac{1-e^{3t}}{4}\mathcal{U}(t)$

2. Soit f_4 le signal causal représenté par :



On veut calculer la transformée de Laplace de f_4 de deux façons différentes :

(a) Déterminer la transformée de Laplace de f_4 en utilisant la définition de la transformée de Laplace et en effectuant le calcul intégral.

(b) Déterminer la transformée de Laplace de f_4 en écrivant d'abord f_4 avec des fonctions échelon.

Exercice 18
Déterminer les transformées de Laplace inverses des fonctions suivantes :

1. $F(p) = \dfrac{p^6 + 4p^3 + 3p^2}{p^7}$
2. $G(p) = \dfrac{5}{p^2 - 5p}$
3. $H(p) = \dfrac{p+\pi}{p^2 + 2\pi p + \pi^2 + \pi}$
4. $K(p) = e^{-3p}\left(\dfrac{p+1}{p^2+1}\right)$

Exercice 19 ***Extrait de DS 2018***
Résoudre le système différentiel suivant avec f et g deux fonctions causales.

$$\begin{cases} f' + g' = -3f \\ f' - g' = f \\ f(0) = 1 \quad g(0) = 2 \end{cases}$$

Chapitre 7

Suites numériques

Exercice 1 ***Attention à l'écriture !***
Soit quatre suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ respectivement définies par

$$u_n = \frac{7}{8}n^2, \qquad v_n = 3n+4, \qquad w_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Calculer :

1. u_{10+3}, $u_{10}+3$ et $u_{10}+u_3$,
2. v_{11^2}, v_{11}^2, w_{3^3} et w_3^3,
3. w_{v_3}, v_{u_8}, et u_{w_2}.

Exercice 2 ***Calcul des premiers termes***
Pour chaque suite xalculer U_0, U_1, U_2 et U_3 (pour les suites définies de manière récurrente on prendra $U_0 = 1$) :

1. $U_n = 3n^2 + 1$,
2. $U_n = 3n + 1$,
3. $U_{n+1} = 3U_n + 1$,
4. $U_n = 3^n + 1$,
5. $U_{n+1} = 3^{U_n} + 1$,
6. $U_{n+1} = 3U_n + n$.

Exercice 3 ***Arithmétiques ou géométriques ?***
Dire si les suites suivantes sont arithmétiques ou géométriques ou ni l'une ni l'autre.

1. $U_n = 3n + 1$,
2. $U_{n+1} = 3U_n + 1$,
3. $U_{n+1} = U_n + 3$,
4. $U_n = 3^n + 1$,
5. $U_n = n^n$,
6. $U_{n+1} = \frac{U_n}{2}$.

Exercice 4 ***Suites géométriques***
Montrer que les suites sont des suites géometriques et les écrire sous la forme $U_0 \times q^n$ puis déterminer la limite en $+\infty$.

1. $U_n = \dfrac{3}{2^n}$,
2. $U_n = 2^{n+1}$,
3. $U_n = (\sqrt{2})^{3n}$,
4. $U_n = \dfrac{3^n}{2^{2n}}$.

Exercice 5 ***Limites de suites***
Déterminer, si elles existent, les limites des suites suivantes :

1. $u_n = \left(\dfrac{13}{\sqrt{170}}\right)^n$,
2. $u_n = \left(\frac{(\sqrt{2}}{2}\right)^{3n}$,
3. $u_n = \left(\dfrac{3}{\pi}\right)^{-2n}$,
4. $u_n = (-1)^n \times \dfrac{n+1}{n}$,
5. $u_n = \left(\dfrac{1+i}{2}\right)^n$,
6. $u_n = -3\sqrt{(1,05)^{\frac{n}{2}}}$.

Exercice 6 ***Symbole Σ***

1. Exprimer à l'aide d'un signe sigma :

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{256} \quad \text{puis} \quad B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{256}$$

2. Écrire les sommes suivantes avec le signe Σ puis les calculer :
   (a) $2^5 + 2^6 + \ldots + 2^{11} + 2^{12}$.
   (b) $4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19$.
   (c) $1 + \pi + \pi^2 + \ldots + \pi^{99} + \pi^{100}$.
   (d) La somme des entiers multiples de 7 supérieurs à 100 et plus petits que 1000.

3. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} 2^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+1}$.

Exercice 7 ***Calcul de sommes***
Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{15} 2k+3$, 2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{12} 3 \times \frac{1}{2^n}$, 3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{7} 2n+3^n$, 4. $\displaystyle\sum_{k=3}^{18} e^{ki\frac{\pi}{2}}$, 5. $\displaystyle\sum_{k=17}^{53} (-1)^k$.

Exercice 8
Toutes les réponses seront données sous la forme :
— d'une expression littérale,
— d'un calcul posé
— et enfin d'une application numérique.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme $U_0 = 3$ et de raison -4.
   Déterminer u_7, u_{18} et $\displaystyle\sum_{i=7}^{18} u_i$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite géométrique de premier terme $U_0 = 5$ et de raison $-\dfrac{1}{2}$.
   Déterminer u_7, u_{18} et $\displaystyle\sum_{i=7}^{18} u_i$.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique. On donne $u_4 = 7$ et $u_7 = 1$.
   Déterminer la raison et le premier terme de cette suite.
4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique. On donne $u_4 = 4$ et $u_7 = 108$.
   Déterminer la raison et le premier terme de cette suite.

Exercice 9 ***Sommes de suites arithmétiques et géométriques***
Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit (U_n) une suite arithmétique de premier terme $U_0 = 3$ et telle que $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} U_k = 99$.
   Déterminer la raison de la suite.
2. Soit la suite (U_n) définie pour tout entier n par : $U_n = 3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 4n + 3$.
   Calculer la somme : $S_N = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_N$ en fonction de N.

Exercice 10 ***Limites de sommes***
Soit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme u_0 et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}.$$

1. Démontrer qu'il existe une valeur de u_0 pour laquelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante.
2. On pose dorénavant $u_0 = 2$ et on définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ v_n = u_n - 1$$

   Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
3. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
4. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. On pose $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et $S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
   (a) Exprimer S_n et S'_n en fonction de n.
   (b) Déterminer les limites de S_n et de S'_n lorque n tend vers $+\infty$.

Exercice 11 ***Extrait de DS 2016***

1. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme U_0.
   Sachant que
$$U_0 + U_1 + U_2 = \frac{5}{2} \qquad \text{et} \qquad U_1 + U_2 + U_3 = \frac{7}{2}$$
   Déterminer les valeurs de r et U_0.
2. Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géometrique de raison q et de premier terme V_0.
   Sachant que
$$V_0 + V_1 + V_2 = \frac{26}{9} \qquad \text{et} \qquad V_1 + V_2 + V_3 = \frac{26}{27}$$
   Déterminer les valeurs de q et V_0.

Exercice 12 Répondre par vrai ou faux en justifiant

1. Le produit de 2 suites géométriques est une suite géométrique.
2. La somme de 2 suites géométriques est une suite géométrique.
3. Le quotient de 2 suites géométriques est une suite géométrique.
4. Le produit de 2 suites arithmétriques est une suite arithmétrique.
5. La somme de 2 suites arithmétriques est une suite arithmétrique.

Compléments

Exercice 13 Dans chacun des cas ci-dessous exprimez u_n en fonction de n.

1. (u_n) est une suite arithmétique telle que : $u_3 = 2$ et $u_{11} = 0$.
2. (u_n) est une suite géométrique de raison q telle que : $q = 2$ et $u_0 + u_1 + \cdots + u_7 = 510$.

Exercice 14 Pour chacune des suites $u_n = (-3)^{2n+1}$ et $v_n = \dfrac{e^{(n+1)^2}}{e^n}$:

1. Calculez les 3 premiers termes de la suite.
2. Précisez en justifiant si la suite est géométrique ou non. Si oui, précisez sa raison.

Chapitre 8

DS de l'année 2023-2024

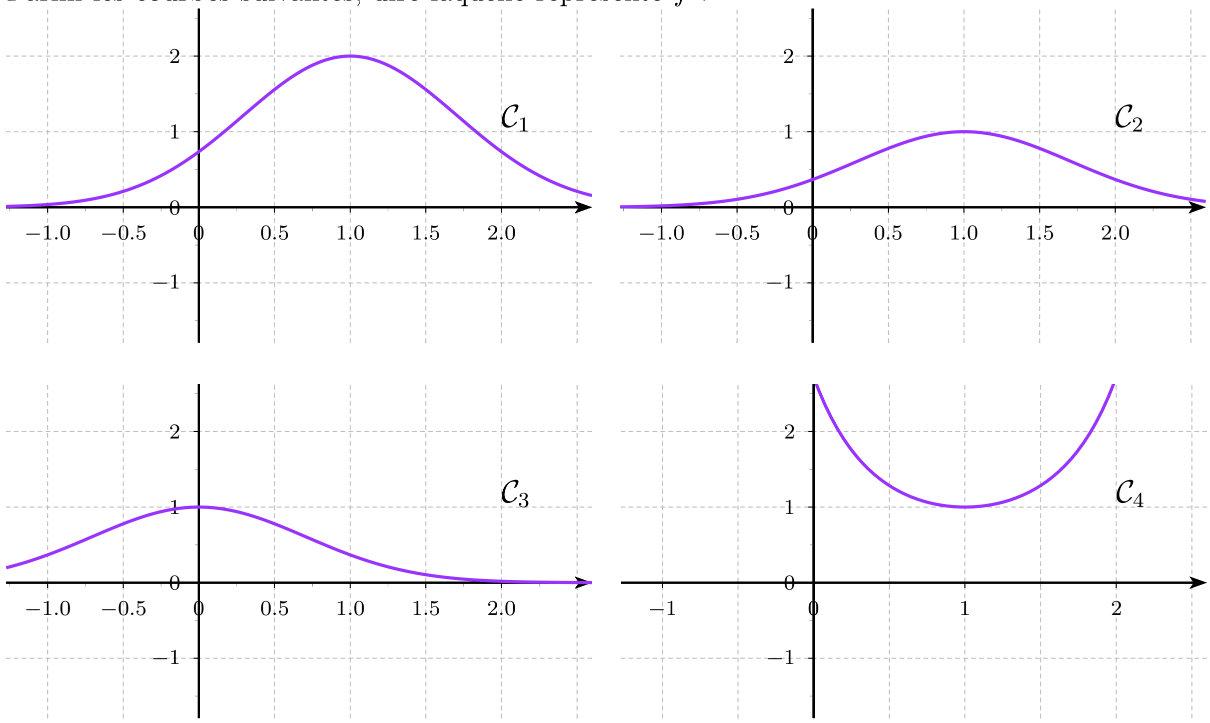
Mathématiques - Devoir Surveillé 1
Vendredi 9 février 2024 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 15 Soit la fonction $f(x) = e^{-x^2+2x-1}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer la dérivée de f et en déduire le sens de variation de f.
3. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$ et compléter le tableau de variation de f.
4. Parmi les courbes suivantes, dire laquelle représente f :



Exercice 16

1. Soient les fonctions $f_1(x) = \sqrt{2x-1}$, $g_1(x) = \cos(x+2)$ et $h_1(x) = \dfrac{x}{x+2}$. Déterminer

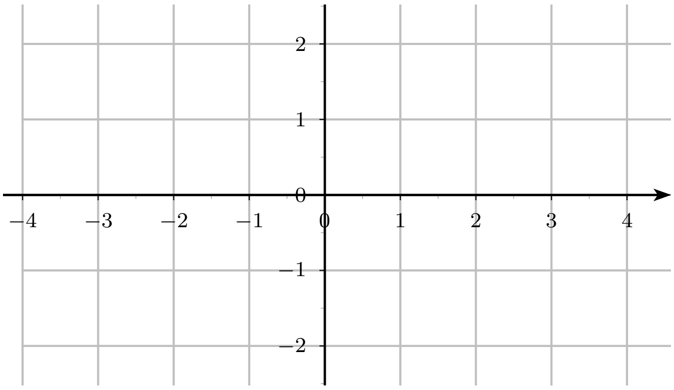
(a) $f_1 \circ g_1$ (b) $h_1 \circ g_1$ (c) $h_1 \circ h_1$

2. On considère la fonction $f(x) = (x+3)^3 - 5$. Décomposer f sous la forme $w \circ v \circ u(x)$ avec w, v et u trois fonctions différentes de l'identité.
3. Résoudre les équations et inéquations suivantes :

   (a) $|2x-3| = 7$ (b) $|x+5| < 2$ (c) $|3x+1| = |x-2| + 1$

4. Tracer, sur le graphique ci-dessous, les courbes représentatives des fonctions suivantes

   (a) $f(x) = |1 - \frac{1}{2}x|$ (b) $g(x) = |\sin(x)|$



Exercice 17

1. Calculer les limites suivantes :

   (a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x+1}}{e^{x-3}}$ (c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{1}{x+2}\right)$ (e) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-6}$

   (b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x+3)}{x-4}$ (d) $\lim\limits_{x \to +\infty} x + e^{-x} - \ln(x)$

2. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

   (a) $f(x) = \sqrt{2x-1}$ (c) $h(x) = \dfrac{3x}{2x-1}$

   (b) $g(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$ (d) $k(x) = (3x+4)\ln(-2x+1)$

Exercice 18

1. Déterminer le module et l'argument de : $z = \dfrac{R_1 + jC\omega}{R_2 + jC\omega}$
2. Déterminer ω en fonction de ω_0 : $1 + \dfrac{\omega}{\omega_0} = \dfrac{\omega}{2\omega_0}$

Exercice 19 On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

1. Les calculs suivants sont-ils possibles ? Si oui, faites le calcul !

(a) $A+C$ (b) $A\times B$ (c) $4\times C$ (d) $B\times C$ (e) ${}^tA$

2. Déterminer la matrice D telle que :

$$D \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad d_{i,j} = 2i - j$$

3. On considère les matrices E et F, sont elles l'inverse l'une de l'autre ?

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Mathématiques - Devoir Surveillé 2
Vendredi 29 mars 2024 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Soit la fonction $f(x) = \ln(x+2) - 3$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f. On le notera D par la suite.
2. Montrer que f est bijective de D dans $\mathbb{R}$.
3. Déterminer la réciproque de f.

Exercice 2 Donner les valeurs en justifiant la démarche :

1. $\arcsin(0.5)$
2. $\arccos(-1)$
3. $\arctan\left(\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$
4. $\arccos\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$
5. $\arccos\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$
6. $\lim\limits_{t\to+\infty} \arcsin(t)$

Exercice 3 Soient les matrices A, B et C suivantes

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 21 \\ 4 & -12 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les déterminants de A, B et C
2. A, B et C sont-elles inversibles ?
3. Calculer, si possible, A^{-1} et B^{-1}

Exercice 4 Résoudre les systèmes suivants en utilisant **la méthode de Gauss**.

1.
$$\begin{cases} x + y - 2z = 7 \\ 2x + 3y - 5z = 19 \\ -3x + 5y - z = 15 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} 3a + 2b = 1 \\ -7a - 4b = 5 \end{cases}$$

Exercice 5 Les questions 1,2 et 3 sont indépendantes.

1. Soient les polynômes $P_1(X) = X^5 + 2X^4 + 3X^2 + X - 5$ et $Q(X) = X(X+1)^2$.
   Donner le degré de :

   (a) $R_1(X) = P(X) \times Q(X)$
   (b) $R_2(X) = Q \circ P(X)$
   (c) $R_3(X) = P(X) - (X^2+1)Q(X)$

2. Déterminer un polynôme P_2 tel que :
   - $deg(P_2) = 8$
   - $P_2 \in \mathbb{R}[X]$
   - -3 et 1+2i sont racines simples de P_2
   - 42 est racine de multiplicité 3 de P_2
3. Le polynôme $P_3(X) = X^3 + (1+3i)X^2 + 2 - 3i$ admet-il une racine réelle ?

Exercice 6 Soient les polynômes $P(X) = X^5 - 2X^4 - 3X^3 - 12X^2 - 28X - 16$.

1. Montrer que $2i$ est racine de P
2. $a = -1$ est racine de P. Déterminer sa multiplicité.
3. Poser la division euclidienne de P par $(X-4)$.
4. Donner la forme factorisée de P dans $\mathbb{C}[X]$.
5. Donner la forme factorisée de P dans $\mathbb{R}[X]$.

Mathématiques - Devoir Surveillé 3
Vendredi 7 juin 2024 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Calculer par la méthode de votre choix

1. $I_1 = \displaystyle\int_{-4}^{4} e^{-\frac{1}{4}t+3}\,dt$
2. $I_2 = \displaystyle\int_{-2}^{2} t^3 e^{t^2+3}\,dt$
3. $I_3 = \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos(3x)\cos(5x)dx$
4. $I_4 = \displaystyle\int_{1}^{e} \frac{2}{\ln(t)+4} \times \frac{1}{t}\,dt$
   (indication : on pourra poser le changement de variable $u = \ln(t)$)

Exercice 2

1. Déterminer la D.E.S de la fonction $f(t) = \dfrac{25x^2}{(x^2+3x-4)(x+4)}$.
2. Calculer $I_6 = \displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{25x^2}{(x^2+3x-4)(x+4)}\,dt$

Exercice 3

1. Calculer l'intégrale de la fonction g sur l'intervalle $[-2;7]$:
   — g est périodique de période 3

— $g(x) = 3$ sur l'intervalle $[0, 2[$
— $g(x) = -1$ sur l'intervalle $[2, 3[$

2. Calculer l'intégrale $J_3 = \displaystyle\int_{-1}^{4} |x^2 - 1|\, dx$

3. Soit p un réel strictement positif. Déterminer en fonction de p : $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-pt}\, dt$

Exercice 4

1. Déterminer la nature de chaque intégrale généralisée :

   (a) $K_1 = \displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \frac{5}{(2t+3)^2+1} dt$

   (b) $K_2 = \displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t^3}} dt$

2. Calculer la valeur de K_1

Exercice 5 Dire si les équivalences suivantes sont vraies ou fausses

1. $\displaystyle\frac{t^2+t}{(t^3-1)(t+5)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$

2. $\sin(\sqrt{t}) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{t}$

3. $\cos(t) - 1 \underset{0}{\sim} t$

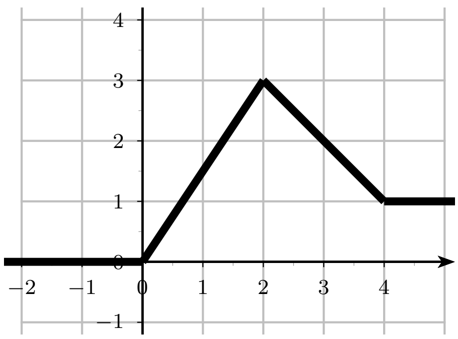
Exercice 6

1. Tracer, sur votre copie le plus proprement possible, les représentations graphiques des fonctions suivantes :

   (a) $f(t) = \left(-\frac{1}{2}t + 1\right)\mathcal{U}(t) + (t-1)\mathcal{U}(t-2) - \dfrac{t}{2}\mathcal{U}(t-4)$

   (b) $f(t) = \mathcal{U}(t-1) + 2\mathcal{U}(t-2) - 5\mathcal{U}(t-3)$

2. Déterminer une écriture de la fonction tracée ci-dessous avec des fonctions échelons :



Exercice 7 Calculer les transformées de Laplace de chacune des fonctions suivantes :

1. $f_1(t) = (3t^4 - 2t^3 + t)\mathcal{U}(t)$
2. $f_2(t) = (e^{-3t} - e^{3t})\mathcal{U}(t)$
3. $f_3(t) = \sin(3t)\,\mathcal{U}\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$
4. $f_4(t) = \mathcal{U}(t-2) - 3t^2\mathcal{U}(t-3)$

Chapitre 9

DS de l'année 2022-2023

Mathématiques - Devoir Surveillé 1
Vendredi 17 février 2023 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 ***Chapitre 7 (semestre 1) : étude de fonctions***
Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 - 2x + 1$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2+3x+1}{x+2}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{3x+1}}{e^{x^2+3}}$
4. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x-2}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}(x+2)\ln(x)$

Exercice 2 ***Chapitre 7 (semestre 1) : étude de fonctions***
Déterminer les valeurs de x décrites par les équations et inéquations suivantes :

1. $|x| \geq 2$
2. $|x+4| < 2$
3. $|x| = -2$
4. $|x+1| = |2x+1|$

Exercice 3 ***Chapitre 1 : fonctions réciproques***
Calculer :

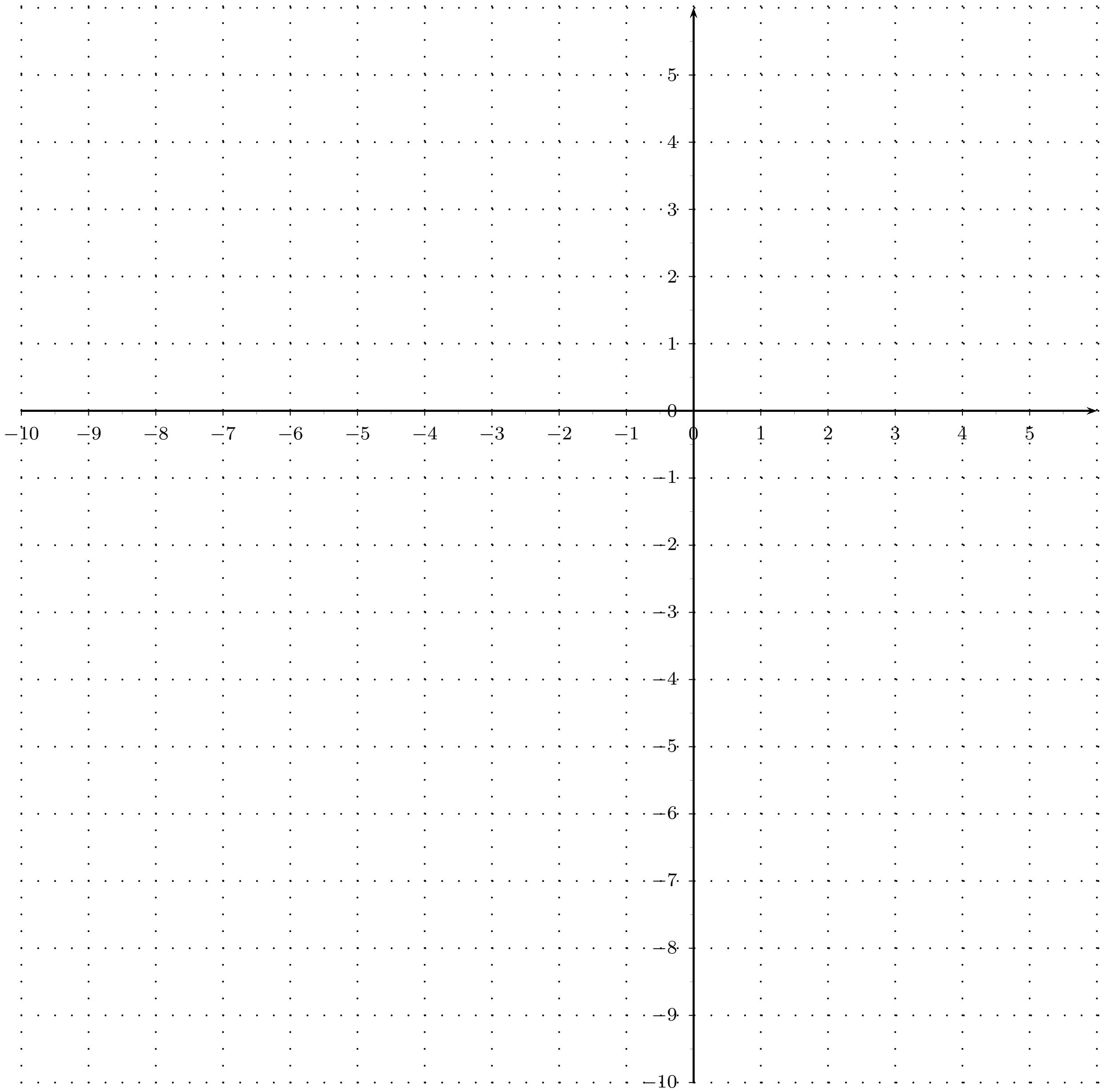
1. $\arcsin(-0.5)$
2. $\arccos\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$
3. $\arctan\left(\tan\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$
4. $\arccos\left(\sin\left(\frac{23\pi}{6}\right)\right)$

Exercice 4 ***Chapitre 1 : fonctions réciproques***
Soit f la fonction définie par $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer la dérivée de f.
3. Dresser le tableau de variation de f (avec les éventuelles limites et images de f).
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f sur le graphique de la page suivante.
5. Déterminer l'image par f de :

(a) l'intervalle $[-1, 0[$ (b) l'intervalle $[1, 4[$ (c) l'intervalle $]3, +\infty[$

6. Montrer que f est une bijection de $[2, +\infty[$ dans un ensemble E que l'on déterminera.
7. Soit g la fonction définie par : $g(x) = \sqrt{1-x} + 2$.
   (a) Donner l'expression de la fonction composée $f \circ g$.
   (b) Que pouvez-vous en déduire ?
   (c) Tracer la courbe représentative de g sur le graphique de la page suivante.



Exercice 5 ***Poly ski : Introduction au calcul matriciel***
On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Les calculs suivants sont-ils possibles ? Si oui, faites le calcul !

(a) $A+B$ (b) $A \times B$ (c) $B+C$ (d) $B \times C$ (e) $2 \times B$

2. Déterminer la matrice transposée de A.
3. Déterminer la matrice D telle que :

$$D \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad d_{i,j} = i - j$$

Mathématiques - Devoir Surveillé 2
Vendredi 14 avril 2023 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 ***Chapitre 2 : Systèmes linéaires et matrices***
Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, déterminer la matrice inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 ***Chapitre 2 : Systèmes linéaires et matrices***

1. Résoudre le système suivant en utilisant **la méthode de Gauss**.

$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x - 3y + z = -8 \\ 3x + y + 2z = 11 \end{cases}$$

2. On considère le système suivant :

$$\begin{cases} 3x + 2z = 8 \\ x - 2z = 16 \\ x + 2y = -8 \end{cases}$$

   (a) Ecrire le systeme sous la forme $AX = B$ avec $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$, $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   (b) Calculer le déterminant de la matrice A
   (c) Déterminer la matrice inverse de A
   (d) Résoudre le système **matriciellement**

Exercice 3 ***Chapitre 3 : Polynômes***
Soient les polynômes $P(X) = X^6 - 5X^5 + 10X^4 - 8X^3 - 4X^2 + 12X - 8$
et $Q(X) = X^2 - X - 2$.

1. Donner le degré de :

   (a) $R_1(X) = P(X) \times Q(X)$
   (b) $R_2(X) = P(X) \circ Q(X)$
   (c) $R_3(X) = P(X) - Q(X)$
   (d) $R_4(X) = P(X) - X^4 Q(X)$

2. Effectuer la division euclidienne de P par Q.
3. Calculer $(1+i)^2$ puis en déduire $(1+i)^3$ et $(1+i)^4$.
4. Montrer que $1+i$ est racine du polynôme $R(X) = X^4 - 4X^3 + 8X^2 - 8X + 4$.
5. Déterminer la multiplicité de la racine $1+i$ pour R
6. Déterminer, en justifiant, une autre racine de R ainsi que sa multiplicité.
7. Factoriser P dans $\mathbb{C}$
8. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{R}$

Exercice 4 ***Chapitre 3 : Polynômes***

1. Donner la DES de $F_1(X) = \frac{X-1}{(X+1)(X-2)}$
2. Donner la DES de $F_2(X) = \frac{X-1}{(X+1)^2(X-2)}$
3. Donner **la forme** de la DES de $F_3(X) = \frac{X-2}{(X^2+1)(X-1)}$

Mathématiques - Devoir Surveillé 3
Vendredi 2 juin 2023 - Durée : 1h15

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 ***Chapitre 4 : Calcul intégral - partie 1***

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \dfrac{6x+15}{x^2+1}$
2. $f_2(x) = \dfrac{6x+15}{x^2+5x+1}$
3. $f_3(x) = \dfrac{6x+15}{x^2}$
4. $f_4(x) = \dfrac{6x+15}{7}$

Exercice 2 ***Chapitre 4 : Calcul intégral - partie 1***

Calculer par la méthode de votre choix

1. $I_1 = \displaystyle\int_2^3 (4t-2)\ln(t-1)\,dt$
2. $I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)\cos(5t)dt$
3. $I_3 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4(2x)\cos^3(2x)dx$
   (indication : on pourra poser le changement de variable $t = sin(2x)$)
4. $I_4 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} (2t+1)e^{-3x}dx$

Exercice 3 ***Chapitre 4 : Calcul intégral - partie 1***

1. Calculer l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[-4; 4]$:

$$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < -3 \\ t+1 \text{ si } t \in [-3; 0[\\ t-1 \text{ si } t \in [0; 3] \\ 0 \text{ si } t > 3 \end{cases}$$

2. Calculer l'intégrale de la fonction g sur l'intervalle $[-2;7]$:
   — g est périodique de période 3
   — $g(x) = 3$ sur l'intervalle $[0, 2[$
   — $g(x) = -1$ sur l'intervalle $[2, 3[$
3. Calculer l'intégrale $J_3 = \displaystyle\int_{-1}^{4} |x^2 - 1|\, dx$

Exercice 4 ***Chapitre 5 : Calcul intégral - partie 2***

1. Déterminer la nature de chaque intégrale généralisée :
   (a) $K_1 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^3 + t^2 + 2} dt$
   (b) $K_2 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt$
   (c) $K_3 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{4}{x^2 + 11x + 30} dx$
2. Calculer la valeur de K_3

Exercice 5 ***Chapitre 5 : Calcul intégral - partie 2***

1. Montrer que

$$\int_0^1 \frac{2xe^x}{3(x+1)^2} dx = \left[\frac{-2}{3(x+1)} \times xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-2}{3(x+1)} \times (1+x)e^x dx$$

2. En déduire la valeur de $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{2xe^x}{3(x+1)^2} dx$.

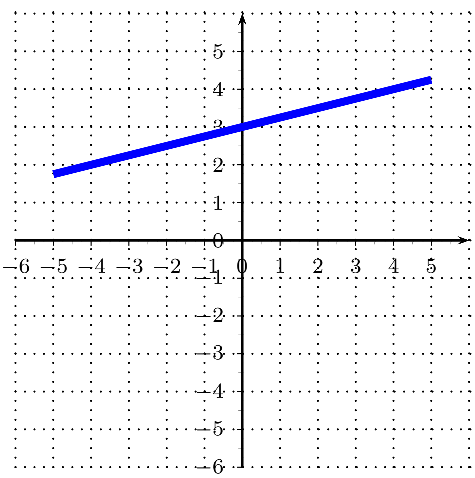
Mathématiques - Interrogation 2 - sujet 5
Juin 2023 - Durée : 20 min

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 6 ***Chapitre 6 : Laplace***

1. Tracer sur le graphique ci-dessous la droite d'équation $y = -3t + 2$.

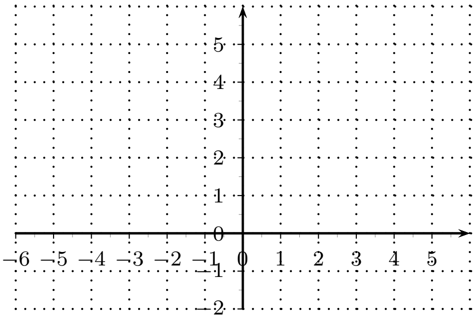


2. Donner l'équation de la droite tracée ci-dessous : $y =$

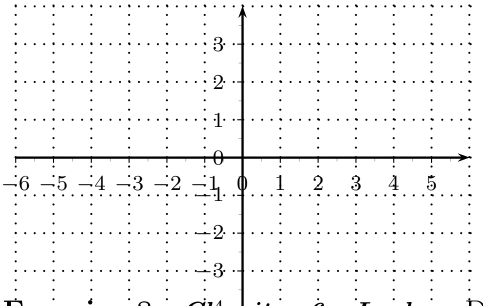
Exercice 7 ***Chapitre 6 : Laplace***

Ecrire les fonctions suivantes sans utiliser la fonction $\mathcal{U}$ puis tracer leur courbe représentative.

1. $f_1(t) = 3\mathcal{U}(t) - 2\mathcal{U}(t-2) + \mathcal{U}(t-3) - 3\mathcal{U}(t-4)$

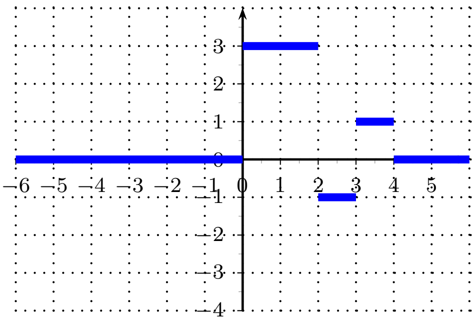


2. $f_2(t) = t\mathcal{U}(t) - t\mathcal{U}(t-1) + (-2t+6)\mathcal{U}(t-3) + (2t-7)\mathcal{U}(t-4)$



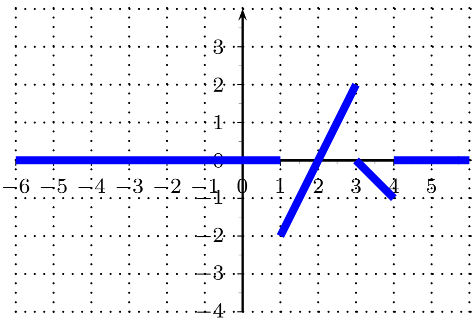
Exercice 8 ***Chapitre 6 : Laplace*** Donner l'expression des fonctions suivantes en utilisant la fonction $\mathcal{U}$.

1.



$f_1(t) =$

2.



$f_2(t) =$

Exercice 9 ***Chapitre 6 : Laplace*** Calculer les transformées de Laplace de chacune des fonctions suivantes :

1. $f_1(t) = (4t-2)\mathcal{U}(t)$ $\quad \mathcal{L}_{f_1}(p) =$

2. $f_2(t) = (5t^3 + 3t^2)\mathcal{U}(t)$ $\quad \mathcal{L}_{f_2}(p) =$

3. $f_3(t) = e^{-t}\mathcal{U}(t)$ $\quad \mathcal{L}_{f_3}(p) =$

4. $f_4(t) = \cos(t)\mathcal{U}(t)$ $\quad \mathcal{L}_{f_4}(p) =$

5. $f_5(t) = 2e^{5t}t\mathcal{U}(t)$ $\quad \mathcal{L}_{f_5}(p) =$

Chapitre 10

DS de l'année 2021-2022

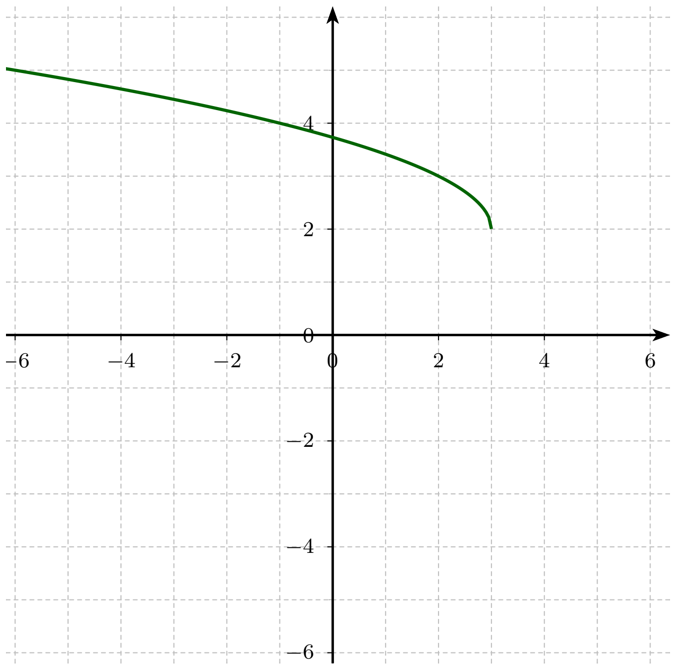
Mathématiques - Interrogation 1 - sujet 1
Mars 2022 - Durée : 40min

Tout document et appareil électronique est interdit

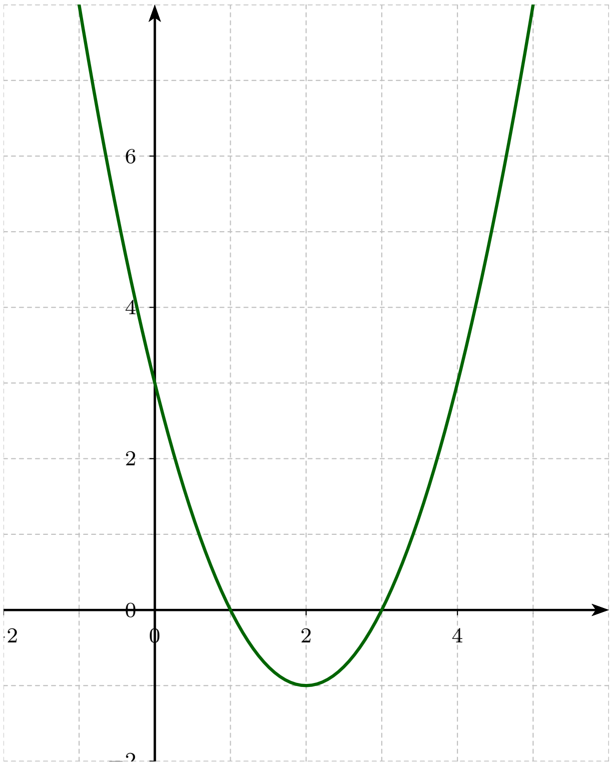
Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 10 ***Chapitre 1 : fonctions réciproques***
Soit la fonction $f(x) = \sqrt{1-3x} - 2$

1. Déterminer D, l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est bijective de D dans un ensemble E à déterminer.
3. Déterminer la fonction réciproque de f.
4. Sur le graphique ci-dessous nous avons tracé la courbe représentative de f. Tracer la courbe de la réciproque de f.



Exercice 11 ***Chapitre 1 : fonctions réciproques***
Soit la fonction $f(x) = (x-2)^2 - 1$ dont le graphe est :



Déterminer, sans justiifier :

1. $f(\mathbb{R}) =$
2. $f([3;4[) =$
3. $f(]0;3[) =$

Exercice 12 ***Chapitre 1 : fonctions réciproques***
Déterminer sans justifier

1. $\arccos(-0,5) =$
2. $\arcsin(-0,5) =$
3. $\arctan(-1) =$
4. $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) =$
5. $\arcsin\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) =$
6. $\arctan\left(\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) =$

Mathématiques - Devoir Surveillé 1
Vendredi 18 février 2022 - Durée : 1h00

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 ***Poly ski : Introduction au calcul matriciel***
Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit la matrice :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$
Calculer A^2 et en déduire la matrice inverse de A.

2. Déterminer la matrice B telle que

$$B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad b_{i,j} = 3^{j-i}$$

3. Soient les matrices C, D et E suivantes

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Indiquer les calculs qui sont possibles et ceux qui sont impossibles (on ne demande pas de faire les calculs) : $C+E$, $C \times E$, $E \times C$, et C^2.

4. Donner un exemple de matrice triangulaire supérieure.
5. Donner un exemple de matrice F de taille 3×3 telle que ${}^tF = F$.
6. Donner l'écriture matricielle du système (on ne demande pas de résoudre) :

$$\begin{cases} 2x & -y & = 3 \\ 3x & +y & = 2 \end{cases}$$

Exercice 2 ***Chapitre 7 (semestre 1) : étude de fonctions***
Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+x-12}{x-3}$
2. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2+x-12}{x-3}$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3e^x}{\ln(x)+10}$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} x - e^{-\ln(x)+10}$
5. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x+1} + 3x - 5$
6. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x+1}}{e^{-x^2+3}}$
7. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2+3x-1) - 3\ln(x)$

Exercice 3 ***Chapitre 1 : fonctions réciproques*** Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue en 0 ?
2. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

Mathématiques - Devoir Surveillé 2
Vendredi 22 avril 2022 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 ***Chapitre 2 : Systèmes linéaires et matrices***

1. Résoudre par la méthode de Gauss les systèmes suivants :

(a)
$$\begin{cases} 3x + y &= 13 \\ 2x - 3y &= -6 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} x + y + z &= 0 \\ 2x + y - 3z &= -10 \\ 3x + 2y + z &= -1 \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} 5x + 4y &= 6 \\ 25x + 20y &= 30 \end{cases}$$

2. Soient les matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & b & \frac{-3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & c \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

   (a) Déterminer a, b et c pour que B soit l'inverse de A.

   (b) Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + 3y + z &= 1 \\ 4x + 4z &= 0 \\ 2x + y + 3z &= -1 \end{cases}$$

Exercice 2 ***Chapitre 2 : Systèmes linéaires et matrices***

1. Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer la matrice inverse de A et de B.
3. Donner un exemple de matrice de taille 2 non inversible.

Exercice 3 ***Chapitre 3 : Polynômes***

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Soient $P(X) = X^3 + X + 1$ et $Q(X) = X^4 - 3X^3 + 2X$.
   Donner le degré de $P \times Q$ et $P \circ Q$.
2. Soit
$$P(X) = X^5 - 2X^4 + 3X^3 - 6X^2 - 4X + 8$$
   (a) Montrer que 2 est racine de P.

   (b) Effectuer la division euclidienne de $X^4 + 3X^2 - 4$ par $X^2 + 4$.

   (c) En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{R}$.
3. Donner un exemple de polynôme vérifiant toutes les conditions suivantes :
   - P est à coefficient réels
   - $2 + i$ est racine simple de P
   - -3 est racine de multiplicité 3 de P
   - P est de degré 6

Exercice 4 ***Chapitre 3 : Polynômes***

On considère les fractions rationnelles suivantes :

$$F_1(X) = \frac{X+2}{(X-1)(X-2)} \quad F_2(X) = \frac{X+2}{(X+1)^2(X-2)}$$

$$F_3(X) = \frac{2X^2+1}{(X^2+1)(X-2)} \quad F_4(X) = \frac{X^6+X-1}{X^5-4X^4+3X^3}$$

1. Faire la DES de F_1.
2. Donner la forme de la DES de F_2 (on ne demande pas la valeur des coefficients).
3. Faire la DES de F_3.
4. Donner la forme de la DES de F_4 (on ne demande pas la valeur des coefficients).

Mathématiques - Devoir Surveillé 3
Vendredi 17 juin 2022 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 ***Chapitre 4 : Calcul intégral - partie 1***

1. Déterminer un primitive des fonctions suivantes :

   (a) $f_1(t) = 3\sin(5t+4)\cos^3(5t+4)$

   (b) $f_2(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$

   (c) $f_3(t) = \frac{4t+6}{(t^2+3t+2)^3}$

   (d) $f_4(t) = \frac{2}{9+4t^2}$

2. Calculer les intégrales suivantes :

   (a) $I_1 = \int_{-1}^{0} \frac{2x}{3t-1} dt$

   (b) $I_2 = \int_{-10}^{10} t^2 \sin(t^3) + 1 dt$

   (c) $I_3 = \int_{-1}^{0} te^{3t+1} dt$

   (d) $I_4 = \int_{0}^{2\pi} \sin(t)\cos(2t) dt$

Exercice 2 ***Chapitre 5 : Calcul intégral - partie 2***

1. (a) Soit $X > 1$. Calculer $I = \int_1^X \frac{1}{(t+1)(t-2)} dt$.

   (b) En déduire la nature (convergente ou divergente) de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(t+1)(t-2)} dt$.

2. Pour chacune des intégrales suivantes dire, en justifiant votre réponse, si elle est convergente ou divergente.

   (a) $J_1 = \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{t^3} dt$

   (b) $J_2 = \int_0^{10} \frac{1}{t^2} dt$

   (c) $J_3 = \int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$

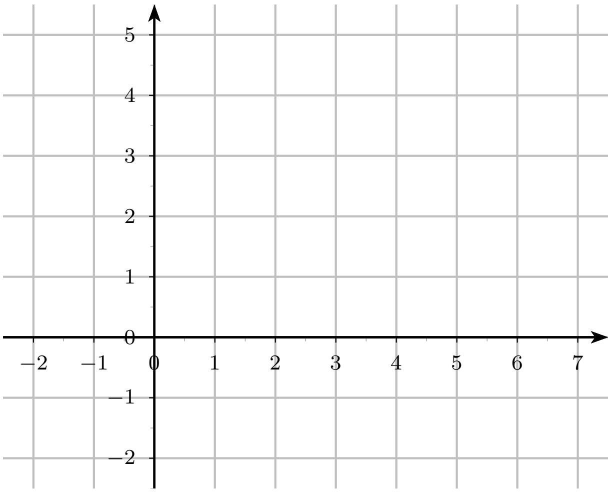
   (d) $J_4 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \ln\left(1+\frac{1}{t}\right) dt$

Exercice 3 ***Chapitre 6 : Laplace***

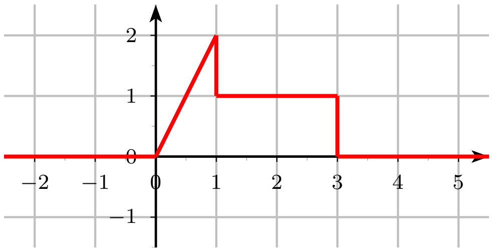
1. Soit $f(t) = 2\mathcal{U}(t-1) + (t-3)\mathcal{U}(t-3) - (3t-6)\mathcal{U}(t-4) + (2t-4)\mathcal{U}(t-5)$

   (a) Donner une écriture de la fonction f sans utiliser la fonction échelon $\mathcal{U}$.

   (b) Tracer la courbe représentative de f sur le graphique ci-dessous.



2. Définir la fonction suivante par une seule égalité (et donc en utilisant la fonction échelon $\mathcal{U}$).



Exercice 4 ***Chapitre 6 : Laplace***

1. Calculer les transformées de Laplace de chacune des fonctions suivantes :

   (a) $g_1(t) = te^{-2t}\mathcal{U}(t)$ (b) $g_2(t) = (t+5)\mathcal{U}(t-3)$

2. Calculer la transformée de Laplace inverse de :

   (a) $F(p) = \frac{2}{p} + \frac{6}{p^4}$ (b) $G(p) = \frac{1}{p^2+4} + \frac{p}{p^2+9}$

Exercice 5 ***Chapitre 6 : Laplace*** On considère l'équation différentielle d'ordre 1 suivante :

$$\begin{cases} f'(t) + 3f(t) = e^{2t}\mathcal{U}(t) \\ f(0) = 4 \end{cases} \tag{E}$$

1. Détermination de la transformée de Laplace F de f :
   (a) Calculer en fonction de $F(p)$: $\mathcal{L}_{f'(t)}(p)$ puis $\mathcal{L}_{f'(t)+3f(t)}(p)$.
   (b) Calculer $\mathcal{L}_{e^{2t}\mathcal{U}(t)}(p)$.
   (c) Appliquer la transformée de Laplace à l'équation (E) et en déduire l'expression de $F(p)$ en fonction de p.
2. Détermination de f :
   On admet que F peut s'écrire sous la forme : $F(p) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{p-2} + \frac{19}{5} \times \frac{1}{p+3}$.
   En déduire l'expression de $f(t)$ pour t positif.