

Nom :

Prénom :

Groupe :

Mathématiques - Devoir Surveillé 1

Vendredi 25 septembre 2020 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \int_0^1 \frac{t^5}{4} + \frac{t^3}{6} + \frac{t}{2} - \frac{1}{4} dt$

2. $J = \int_0^\pi \cos(u) \sin(3u) du$

3. $K = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t) \sin(t) dt$

4. $L = \int_1^3 \frac{t^2 + 1}{\sqrt{t^3 + 3t}} dt$

5. $M = \int_4^5 \frac{2x - 3}{x^2 - x - 6} dx$

6. $N = \int_0^{-1} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx$

7. $P = \int_1^e x \ln(x) dx$

Exercice 2 Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale

$$Q = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \sin(x)} dx$$

en effectuant le changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

1. Montrer que $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ implique $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$ et $dt = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx$

2. Calculer Q en effectuant le changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Exercice 3 Donner une écriture de chacune des fonctions suivantes sans utiliser la fonction \mathcal{U} puis dessiner leur courbe représentative.

1. $f_1(t) = 2\mathcal{U}(t+1) - 3\mathcal{U}(t-1) + 2\mathcal{U}(t-3)$

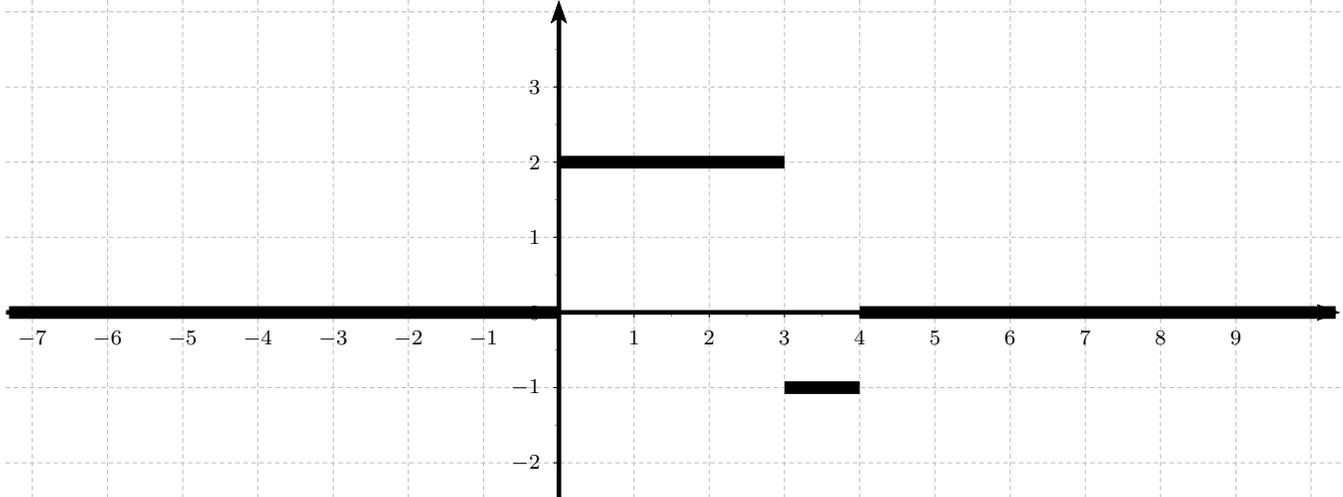
2. $f_2(t) = t\mathcal{U}(t) - (2t-4)\mathcal{U}(t-1) + (2t-4)\mathcal{U}(t-3)$

3. $f_3(t) = e^t - e^t\mathcal{U}(t-1)$

Exercice 4 Exprimer la fonction f suivante à l'aide de la fonction échelon \mathcal{U}

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \text{ et } 1 \leq x < 3 \\ x+1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \frac{3x}{2} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Exercice 5 Soit f la fonction dont la représentation graphique est :



Le but de cet exercice est de calculer la transformée de Laplace de f de 2 façons :

1. en revenant à la définition de la transformée de Laplace
2. en exprimant f à l'aide de la fonction échelon $\mathcal{U}(t)$

Exercice 6

Calculer la transformée de Laplace des fonctions suivantes :

$$1. f_1(t) = \frac{t^4 + 2t^2 + 3t + 1}{5} \mathcal{U}(t)$$

$$2. f_2(t) = e^{\sqrt{2}t + \ln(2)} \mathcal{U}(t)$$

$$3. f_3(t) = \cos(\pi t) \mathcal{U}(t)$$

$$4. f_4(t) = e^{-\pi t} \cos(\pi t) \mathcal{U}(t)$$

$$5. f_5(t) = \cos(\pi t) \mathcal{U}(t - 2)$$