

# Mathématiques - Devoir Surveillé 1

## Vendredi 1 octobre 2021 - Durée : 1h30

*Tout document et appareil électronique est interdit*

*Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.*

**Exercice 1** Calculer les intégrales suivantes :

$$1. I = \int_{-1}^1 \frac{t^5}{4} + \frac{t^3}{6} + \frac{t}{2} - \frac{1}{4} dt \quad 3. K = \int_1^e x^3 \ln(x) dx \quad 5. M = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

$$2. J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(2x) \cos(3t) dx \quad 4. L = \int_0^1 \frac{2t^2 + 3t}{2t + 1} dt$$

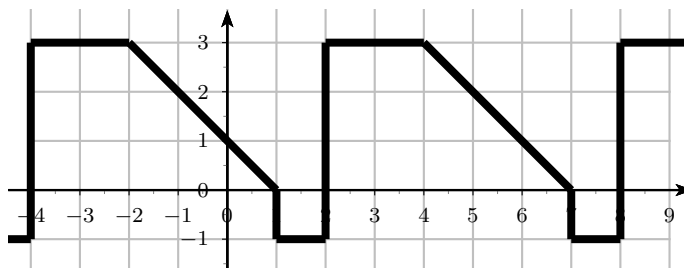
**Exercice 2** Soit l'intégrale  $I = \int_{\ln(3)}^{3\ln(2)} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} dx$ .

On souhaite calculer  $I$  en posant le changement de variable  $u = \sqrt{1+e^x}$ .

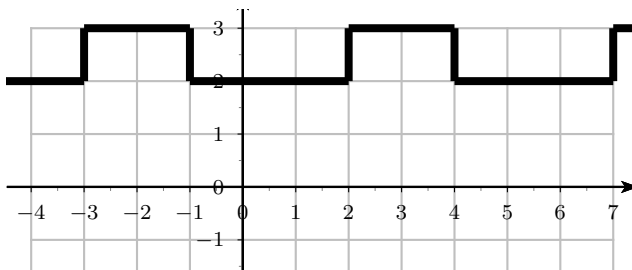
1. Exprimer  $x$  en fonction de  $u$ .
2. Quelles seront les bornes de l'intégrale  $I$  écrite en fonction de  $u$  ?
3. Quelle est la relation entre  $dx$  et  $du$  ?
4. Calculer  $I$ .

**Exercice 3** Les questions suivantes sont indépendantes.

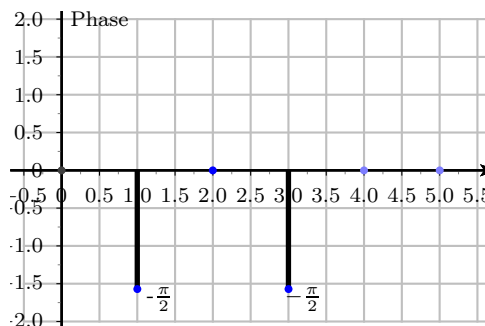
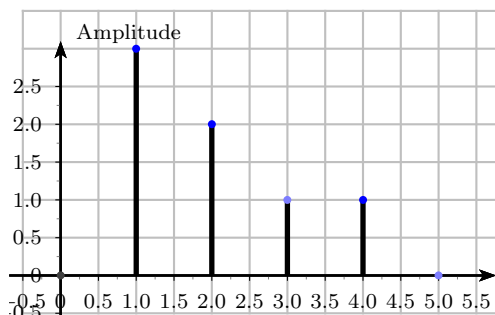
1. Calculer la valeur moyenne du signal suivant :



2. Calculer l'énergie moyenne du signal suivant :



3. On considère les spectres d'amplitude et de phase (en fonction du sinus) d'un signal :



Répondre par vrai ou faux en justifiant.

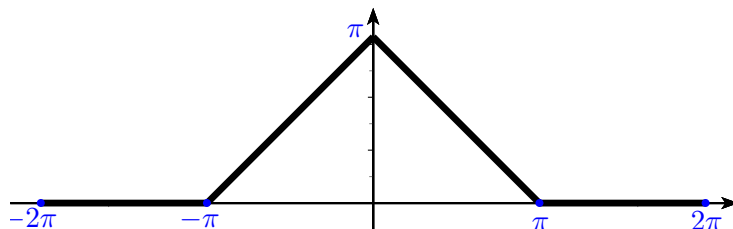
(a) Le signal est pair.

(b) L'énergie moyenne vaut 15.

**Exercice 4** Soit le signal  $\pi$ -périodique  $f$  défini par  $f(t) = \cos(t)$  sur l'intervalle  $]0; \pi[$ .

1. Tracer la courbe représentative de  $f$  sur  $] - \pi; 2\pi[$ .
2. Montrer que  $2 \sin(a) \cos(b) = \sin(a + b) + \sin(a - b)$ .
3. Montrer que  $b_n = \frac{8n}{\pi(4n^2 - 1)}$ .
4. Écrire la série de Fourier de  $f$ .

**Exercice 5** Soit  $f$  le signal  $4\pi$  périodique dont la représentation sur  $[-2\pi; 2\pi]$  est :



1. Déterminer la valeur moyenne du signal.
2. On admet que  $a_n = \frac{4}{\pi n^2} \left(1 - \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ .  
Tracer les spectres d'amplitude et de phase (par rapport au sinus) des 4 premières harmoniques de la série de Fourier de  $f$ .
3. Dédire des questions précédentes les coefficients de Fourier du signal suivant :

