

Nom :

Prénom :

Groupe :

## Mathématiques - Devoir Surveillé 1

### Vendredi 06 octobre 2023 - Durée : 1h30

*Tout document et appareil électronique est interdit*

*Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.*

#### Exercice 1

1. Dire si les suites suivantes sont arithmétiques ou géométriques ou ni l'une ni l'autre. Préciser la raison quand elle existe ainsi que le premier terme si la suite est explicite.

(a)  $U_{n+1} = U_n - 5$

(c)  $U_{n+1} = 4U_n$

(e)  $U_{n+1} = 3U_n + 5$

(b)  $U_n = 2 \times 3^n$

(d)  $U_n = 2n + 1$

(f)  $U_{n+1} = 2n + 4U_n$

2. Déterminer la limite des suites suivantes.

(a)  $U_{n+1} = U_n - 5$

(c)  $U_{n+1} = 4U_n$  avec  $U_0 = 2$

(b)  $U_n = \frac{3}{2^{n+1}}$

(d)  $U_n = \left(\frac{2}{3e^{\frac{i\pi}{3}}}\right)^{-n}$

#### Exercice 2 Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Calculer les sommes suivantes :

(a)  $A = \sum_{k=2}^{10} 3k + 2$

(b)  $B = \sum_{k=0}^8 4 \times 2^{k+2}$

2. Donner la nature (convergente ou divergente) des séries suivantes en justifiant votre réponse.

(a)  $\sum \frac{2^n}{3^{2n+1}}$

(b)  $\sum \ln(n)2^n$

(c)  $\sum \frac{1}{n} \sin\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

#### Exercice 3 Soit $N \in \mathbb{N}^*$ . On note $S_N = \sum_{k=1}^N \frac{2}{1-4k^2}$ .

1. Prouver à l'aide d'un équivalent que la série  $\sum \frac{2}{1-4k^2}$  est convergente.

On souhaite maintenant déterminer la limite de  $S_N$ .

2. Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\frac{2}{1-4k^2} = \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1}$$

3. Exprimer  $S_N$  en fonction de  $N$ .
4. En déduire  $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N$ .

**Exercice 4** Calculer les intégrales suivantes :

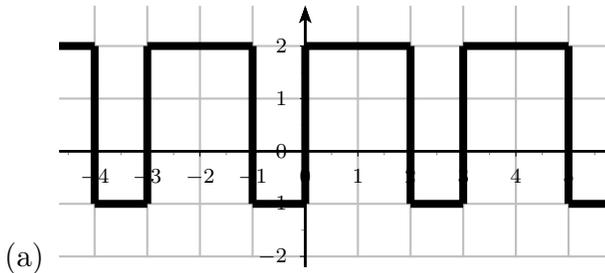
1.  $I_1 = \int_0^1 \frac{1}{t^2 - 6t + 8} dt$
2.  $I_2 = \int_{-\frac{\pi}{18}}^0 \cos^2(6t) \sin(6t) dt$
3.  $I_3 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3(2t) dt$
4.  $I_4 = \int_0^1 \frac{2t-5}{(t-3)(t-2)} dt$
5.  $I_5 = \int_{-1}^0 (t+1) \cos(nt) dt$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$
6.  $I_6 = \int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{t}} dt$  en utilisant le changement de variables  $x = \sqrt{t}$

**Exercice 5** Représenter le spectre d'amplitude et le spectre de phase (par rapport au sinus) du signal suivant :

$$s(t) = 1 + \cos(t) + \sin(t) + \sqrt{3} \cos(2t) - \sin(2t) + 2 \cos(3t) - 2\sqrt{3} \sin(3t) - \sin(4t) - 4 \cos(5t)$$

**Exercice 6** Pour chacun des signaux périodiques suivants, calculer :

1. la valeur moyenne
2. l'énergie moyenne



- (b)  $f$  est paire et de période 2 avec  $f(t) = t + 2$  si  $t \in [0, 1]$