

# Mathématiques - Devoir Surveillé 3

## Vendredi 18 janvier 2019 - Durée : 1h45

*Tous documents et appareils électroniques sont interdits.*

*Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.*

### Exercice 1

Calculer le DL à l'ordre 5 en 0 de  $\frac{\sin(x)}{1+x}$ .

### Exercice 2

1. Soit la fonction  $f$  définie par  $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leq t < 0 \\ -1 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ . Tracer le graphe de  $f$  et calculer sa transformée de Fourier  $F(v)$ .

2. Soit la fonction  $g$  "triangle" définie par  $g(t) = \begin{cases} t+1 & \text{si } -1 \leq t < 0 \\ -t+1 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

(a) Tracer le graphe de  $g$ .

(b) Exprimer  $g$  à l'aide d'un produit de convolution. En déduire sa transformée de Fourier  $G(v)$ .

(c) Retrouver  $G(v)$  à partir de la transformée de Fourier de  $f'$ .

### Exercice 3

1. On considère l'équation différentielle linéaire :

$$y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 0. \quad (H)$$

(a) Donner la forme générale des solutions de  $(H)$ .

(b) Donner la solution de  $(H)$  qui vérifie  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 1$ .

(c) Donner la solution de  $(H)$  qui vérifie  $y(0) = 1$  et  $y(1) = 1$ .

2. On considère maintenant l'équation différentielle linéaire :

$$y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 2t^2. \quad (E_1)$$

(a) Déterminer une solution particulière de  $(E_1)$ .

(b) Déterminer la forme générale des solutions de  $(E_1)$ .

(c) Déterminer la solution de  $(E_1)$  qui vérifie  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 1$ .

3. On considère maintenant l'équation différentielle linéaire :

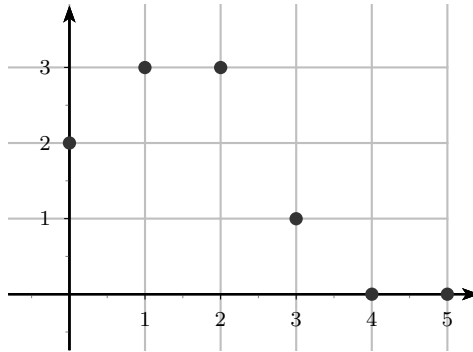
$$y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 2e^{2t}. \quad (E_2)$$

(a) Déterminer une solution particulière de  $(E_2)$ .

#### Exercice 4

Calculer la transformée en  $\mathcal{Z}$  des signaux suivants :

1.  $x_1(n) = 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \mathcal{U}(n-2)$
2.  $x_2(n) = n(-2)^n \mathcal{U}(n)$
3.  $x_3(n)$  est le signal causal donné par :



et  $x(n) = 0$  pour  $n \geq 6$ .

#### Exercice 5

Calculer la transformée inverse de

1.  $X_1(z) = \frac{z}{(z+1)(z-3)}$
2.  $X_2(z) = \frac{z^{-3}}{1+z^{-1}}$
3.  $X_3(z) = z^{-2} + 2z^{-3} + 3z^{-4}$