Mathématiques - Devoir Surveillé 1 - Correction
Vendredi 20 septembre 2024 - Durée : 1h00

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Ecrire sous la forme d'une fraction irréductible

$$\begin{aligned}
A &= 3\times\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{9}\right)+2\\
&= \frac{3}{4\times 9}+2\\
&= \frac{1}{4\times 3}+2\\
&= \frac{1}{12}+2\\
&= \frac{1}{12}+\frac{25}{12}\\
&= \frac{25}{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C &= \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^{-1}\\
&= \left(\frac{y}{xy}+\frac{x}{xy}\right)^{-1}\\
&= \left(\frac{x+y}{xy}\right)^{-1}\\
&= \frac{xy}{x+y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= \frac{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)}{\frac{1}{6}+\frac{1}{8}}\\
&= \frac{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\times\left(\frac{5}{20}-\frac{4}{20}\right)}{\frac{4}{24}+\frac{3}{24}}\\
&= \frac{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\times\frac{1}{20}}{\frac{7}{24}}\\
&= \frac{\frac{15}{30}-\frac{1}{30}}{\frac{7}{24}}\\
&= \frac{\frac{14}{30}}{\frac{7}{24}}\\
&= \frac{14}{30}\times\frac{24}{7}\\
&= \frac{2\times 7}{3\times 2\times 5}\times\frac{3\times 8}{7}\\
&= \frac{8}{5}
\end{aligned}$$

Exercice 2 Ecrire sous la forme $a\sqrt{b}$ avec $a\in\mathbb{R}$ et b l'entier plus petit possible.

1. $D=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$

2. $E=\sqrt{450}-4\sqrt{98}=\sqrt{9\times 25\times 2}-4\sqrt{49\times 2}=3\times 5\sqrt{2}-4\times 7\sqrt{2}=15\sqrt{2}-28\sqrt{2}=-13\sqrt{2}$

3. $F=\sqrt{\frac{700}{256}}=\sqrt{\frac{7\times 100}{16\times 16}}=\frac{10}{16}\sqrt{7}=\frac{5}{8}\sqrt{7}$

4.

$$\begin{aligned} G &= \left(\sqrt{2}-\sqrt{12}\right)\left(\sqrt{18}+\sqrt{3}\right) \\ &= \left(\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) \\ &= \sqrt{2}\times 3\sqrt{2}+\sqrt{2}\times\sqrt{3}-2\sqrt{3}\times 3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\times\sqrt{3} \\ &= 6+\sqrt{6}-6\sqrt{6}-6 \\ &= -5\sqrt{6} \end{aligned}$$

Exercice 3 Ecrire sous forme d'une puissance de 10

1. $H = 10^5 \times \dfrac{1}{10^3\times(10^{-3}\times 10000)^2} = \dfrac{10^5}{10^3\times(10^{-3}\times 10^4)^2} = \dfrac{10^5}{10^3\times(10^1)^2} = 10^{5-3-2} = 10^0 = 1$
2. $I = \dfrac{2^7\times 10^{-3}\times 5^4}{10^{-4}\times 2^3\times 0,01} = \dfrac{2^7-3\times 5^4\times 10^{-3}}{10^{-4}\times 10^{-2}} = \dfrac{2^4\times 5^4\times 10^{-3}}{10^{-6}} = \dfrac{10^4\times 10^{-3}}{10^{-6}} = 10^{4-3+6} = 10^7$

Exercice 4

1. Résoudre

   (a) $-3(4-2x) = 8x+7$

$$\begin{aligned} -3(4-2x)=8x+7 &\Leftrightarrow -12+6x=8x+7 \\ &\Leftrightarrow -12-7=8x-6x \\ &\Leftrightarrow -19=2x \\ &\Leftrightarrow -\frac{19}{2}=x \end{aligned}$$

   (b) $\dfrac{3x}{x+2} = \dfrac{4}{5}$

$$\begin{aligned} \frac{3x}{x+2}=\frac{4}{5} &\Leftrightarrow 3x\times 5 = 4\times(x+2) \\ &\Leftrightarrow 15x=4x+8 \\ &\Leftrightarrow 15x-4x=8 \\ &\Leftrightarrow 11x=8 \\ &\Leftrightarrow x=\frac{8}{11} \end{aligned}$$

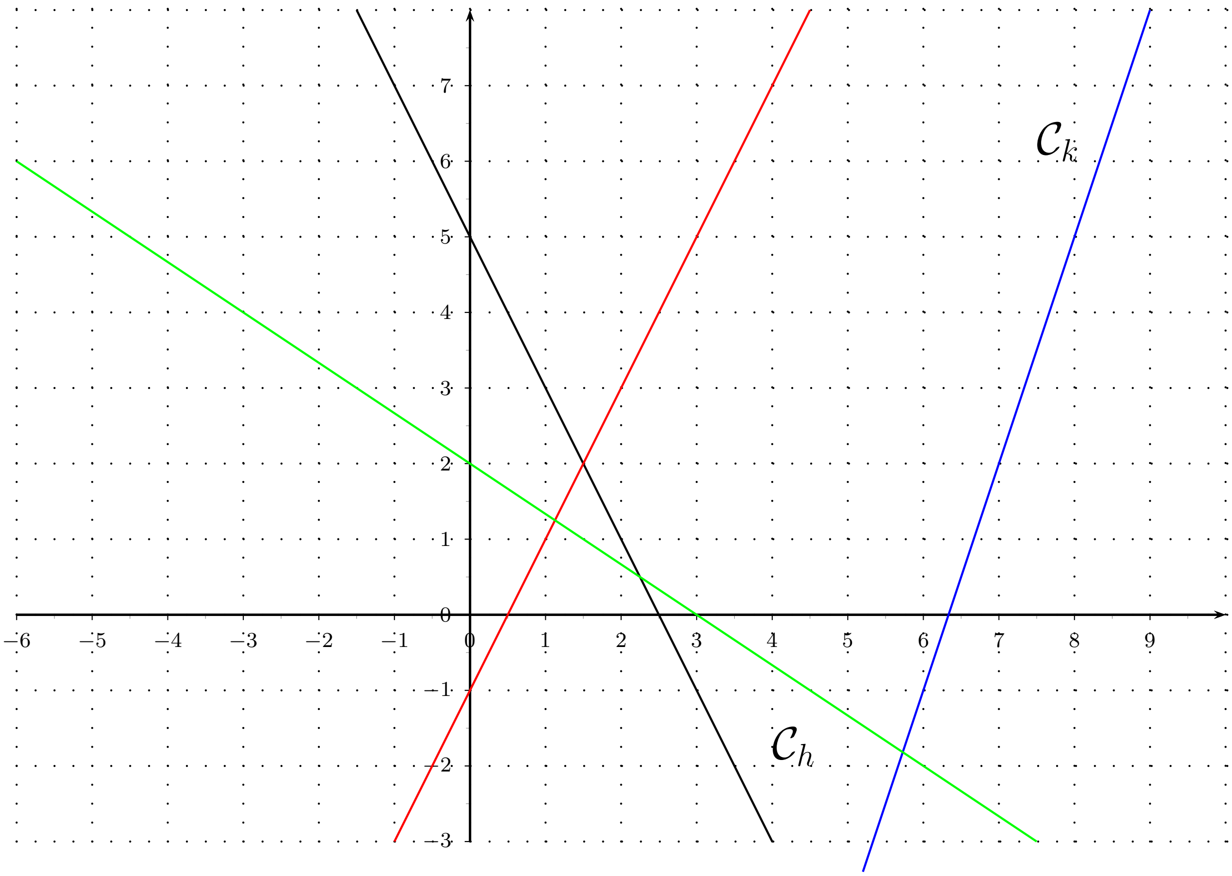
2. Déterminer a en fonction de R, x et C : $\dfrac{\frac{a}{R}+\frac{C}{x}}{\frac{1}{R}+\frac{1}{x}} = 0$

$$\frac{\frac{a}{R}+\frac{C}{x}}{\frac{1}{R}+\frac{1}{x}} = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{R}+\frac{C}{x}=0 \Leftrightarrow \frac{a}{R}=-\frac{C}{x} \Leftrightarrow a=-\frac{RC}{x}$$

Exercice 5

1. Tracer, sur le graphe ci-dessous, les droites représentatives des fonctions suivantes :
   (a) $f(x) = 2x - 1$: coefficient directeur = 2 et ordonnée à l'origine = -1 (droite en rouge)

   (b) $g(x) = -\dfrac{2x-6}{3} = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{6}{3} = -\dfrac{2}{3}x + 2$. On a donc : coefficient directeur $= -\dfrac{2}{3}$ et ordonnée à l'origine = 2 (droite en vert)



2. Donner les équations de chacune des droites h et k du graphique ci-dessus.
   Equation de $h(x) = ax + b$: on peut lire sur le graphique que $a = \dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \dfrac{-2}{1} = -2$ et que $b = 5$ donc
   $$h(x) = -2x + 5$$
   Equation de $k(x) = ax + b$: on peut lire sur le graphique que $a = \dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \dfrac{3}{1} = 3$.
   Donc $y = 3x + b$.
   Pour déterminer b on remplace x et y par les coordonnées d'un point de la droite, par exemple $(6, -1)$:
   $$-1 = 3 \times 6 + b \Leftrightarrow b = -19$$
   Donc
   $$k(x) = 3x - 19$$

Exercice 6

1. Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

   (a) $f(t) = 3t\sin(2t+3)$ est de la forme « $u \times v$ », donc :

   $$f'(t) = 3 \times \sin(2t+3) + 3t \times 2\cos(2t+3)$$

   (b) $g(x) = \dfrac{3x-1}{4x+5}$ est de la forme « $\dfrac{u}{v}$ », donc :

   $$g'(x) = \frac{3 \times (4x+5) - 4 \times (3x-1)}{(4x+5)^2} = \frac{12x+15-12x+4}{(4x+5)^2} = \frac{19}{(4x+5)^2}$$

   (c) $U(i) = R$ est une fonction constante donc :

   $$U'(i) = 0$$

   (d) $s(x) = e^{\frac{2x}{3}}$ est de la forme « e^u », donc :

   $$s'(x) = \frac{2}{3}e^{\frac{2x}{3}}$$

   (e) $v(t) = \ln(2-7t)$ est de la forme « $\ln(u)$ », donc :

   $$v'(t) = \frac{-7}{2-7t}$$

2. Déterminer une primitive pour chacune des fonctions :

   (a) $f(t) = \dfrac{3}{t+6}$ est de la forme « $\dfrac{u'}{u}$ », donc :

   $$f(t) = 3 \times \frac{1}{t+6} \Leftrightarrow F(t) = 3 \times \ln(t+6) + C$$

   où C est une constante réelle.

   (b) $U(i) = Ri$. On note $\mathcal{U}$ une primitive de U :

   $$\mathcal{U}(i) = \frac{Ri^2}{2} + C$$

   où C est une constante réelle.