Nom : Prénom : Groupe :

Mathématiques - Devoir Surveillé 2 - correction
Vendredi 11 octobre 2024 - Durée : 1h15

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1

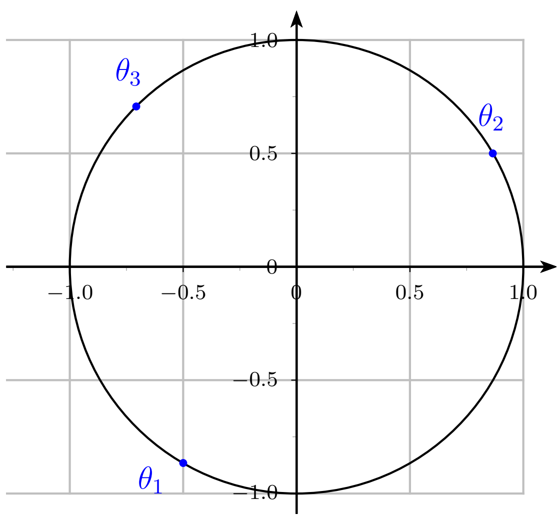
1. Pour chacun des angles, donner la mesure principale puis placer très précisément le point représentatif sur le cercle trigonométrique : $\theta_1 = \dfrac{292\pi}{3}$, $\theta_2 = \dfrac{-35\pi}{6}$ et $\theta_3 = \dfrac{364\pi}{16}$.
   On détermine les mesures principales :

$$\theta_1 = \frac{292\pi}{3} = \frac{294\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = 98\pi - \frac{2\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$$

$$\theta_2 = \frac{-35\pi}{6} = \frac{-36\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = -6\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$$

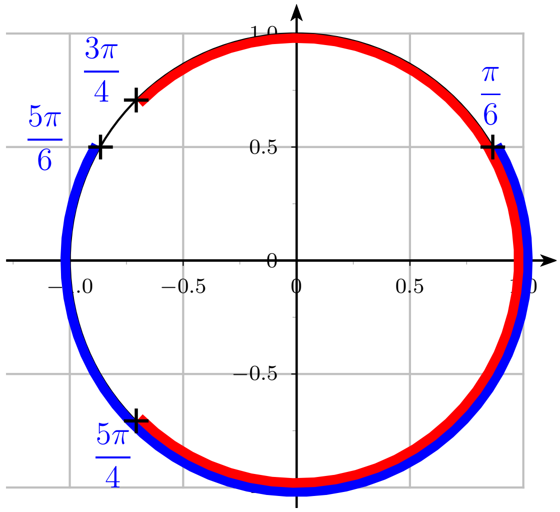
$$\theta_3 = \frac{364\pi}{16} = \frac{182\pi}{8} = \frac{91\pi}{4} = \frac{88\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = 22\pi + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \quad [2\pi]$$

   On peut maintenant placer les angles sur le cercles



2. Donner, sans justifier, les valeurs de :
   (a) $\cos\left(\dfrac{5\pi}{3}\right) = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$
   (b) $\sin\left(\dfrac{-5\pi}{6}\right) = \sin\left(\dfrac{-\pi}{6}\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$
   (c) $\tan\left(\dfrac{-3\pi}{4}\right) = \tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1.$
3. Représenter sur le cercle trigonométrique les angles x qui vérifient les 2 conditions ci-dessous puis écrire l'intervalle des solutions appartenant à $[0; 2\pi]$:

$$\cos(x) > -\frac{\sqrt{2}}{2} \ \textbf{et} \ \sin(x) \leq \frac{1}{2}$$



En rouge : les points qui vérifient : $\cos(x) > -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

En bleu : les points qui vérifient : $\sin(x) \leq \frac{1}{2}$.

Les points du cercle qui sont solutions sont donc les points en bleu **et** rouge

$$S = \left[0; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left]\frac{5\pi}{4}; 2\pi\right]$$

Exercice 2 Les questions 1 à 4 suivantes sont indépendantes.

1. Mettre sous la forme $A\sin(\omega t - \varphi)$, avec $A > 0$, l'expression $s(t) = -7\cos(3t) + 7\sin(3t)$.
   On a $f(t) = a\cos(3t) + b\sin(3t)$ avec $a = -7$ et $b = 7$.
   On pose donc $A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$.
   Ainsi $\cos(\varphi) = \frac{b}{A} = \frac{7}{7\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\varphi) = \frac{a}{A} = \frac{-7}{7\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc $\varphi = -\frac{\pi}{4}$.
   Conclusion : on peut écrire $f(t) = 7\sqrt{2}\sin\left(3t - \frac{\pi}{4}\right)$.

2. Donner l'ensemble des nombres de $]-\pi; \pi]$ qui s'écrivent sous la forme $\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$ où $k \in \mathbb{Z}$.
   On peut remplacer k par $-2, -1, 0, 1$:
   $$S = \left\{\frac{-5\pi}{6}; \frac{-\pi}{3}; \frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right\}$$

3. Soit θ un angle tel que : $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ et $\sin(\theta) = \frac{5}{13}$. Donner la valeur exacte de $\cos(\theta)$.
   On sait que $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$.
   Donc $\cos^2(\theta) = 1 - \sin^2(\theta) = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$
   Donc $\cos(\theta) = \frac{12}{13}$ ou $\cos(\theta) = -\frac{12}{13}$.
   Or $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, donc son cosinus est négatif.
   Donc $\cos(\theta) = -\frac{12}{13}$.

4. Résoudre sur $[0; 2\pi[$: $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2} &\Leftrightarrow \sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\\
&\Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ ou } 2x-\frac{\pi}{3}=\pi+\frac{\pi}{6}+2k\pi\\
&\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ ou } 2x=\frac{\pi}{3}+\pi+\frac{\pi}{6}+2k\pi\\
&\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ ou } 2x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi\\
&\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+k\pi \text{ ou } x=\frac{3\pi}{4}+k\pi
\end{aligned}$$

Les solutions sur $[0;2\pi[$ sont donc :

$$S=\left\{\frac{\pi}{12};\frac{13\pi}{12};\frac{3\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right\}$$

Exercice 3 Répondre par vrai ou faux en justifiant :

1. Soient a et b deux réels : $a+b\neq 0 \Rightarrow a\neq 0 \textit{ ou } b\neq 0$.
   On peut écrire la contraposée de l'implication :
   $$a=0 \textit{ et } b=0 \Rightarrow a+b=0$$
   Cette implication est vraie (de manière évidente) donc la proposition de la question 1 est **vraie** aussi.
2. $\forall x\in\mathbb{R} : \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)=0$
   On peut simplifier l'expression :
   $$\begin{aligned}
   \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right) &= \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\\
   &= -\sin(x)+\sin(x)\\
   &= 0
   \end{aligned}$$
   Donc la proposition est **vraie**.
3. $\forall x\in\mathbb{R} : \cos(2x)=2\cos(x)$
   Contre-exemple : pour $x=0$: $\cos(2x)=\cos(0)=1$ et $2\cos(x)=2\cos(0)=2$.
   Donc la proposition est **fausse**.
4. $\sum_{k=1}^{5} k(k+1)=70$
   Calculons la valeur de la somme :
   $$\sum_{k=1}^{5} k(k+1)=1(1+1)+2(2+1)+3(3+1)+4(4+1)+5(5+1)=2+6+12+20+30=70$$
   Donc l'églité est **vraie**.

Exercice 4 Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. Donner la contraposée de : « Si tu échoues à ton diplome, tu ne partiras pas en vacances »
   La contraposée s'écrit : « tu partiras en vacances $\Rightarrow$tu n'as pas échoué à ton diplôme »
2. On considère la propriété $P_1 : \forall x \in \mathbb{R} \;:\; \exists y \in \mathbb{R}$ tel que $xy = 1$.
   (a) Donner la négation de P_1.
   La négation de P_1 s'écrit $\overline{P_1} : \exists x \in \mathbb{R}$ tel que $\forall y \in \mathbb{R} \;\; xy \neq 1$
   (b) La propriété P_1 est elle vraie ?
   La propriété P_1 est **fausse** car on peut trouver un conter-exemple : pour $x = 0$, il n'existe pas de y tel que $xy = 1$.
   (c) La propriété non-P_1 est elle vraie ?
   Puisque P_1 est fausse, alors non P_1 est vraie.
3. Ecrire avec un signe Sigma :
   (a) $S_1 = \frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} + \ldots + \frac{40}{41} = \sum_{k=1}^{20} \frac{2k}{2k+1}$
   (b) $S_2 = 6 + 9 + 12 + \ldots + 90 = \sum_{k=2}^{30} 3k$

Exercice 5 Déterminer (en expliquant le calcul ou la démarche) :

1. $\arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$ car on sait que $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ et que $\tan(-x) = -\tan(x)$
2. $\arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{6}$ car $\frac{\pi}{6}$ est dans l'intervalle de réponse de arctan.
3. $\arctan\left(\tan\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \arctan\left(\tan\left(-\frac{2\pi}{3} + \pi\right)\right)$ car on sait que $\tan(x + \pi) = \tan(x)$.
   donc $\arctan\left(\tan\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$ car $\frac{\pi}{3}$ est dans l'intervalle de réponse de arctan.
4. $\tan\left(\arctan(3)\right) = 3$ car $\tan(\arctan(x) = x$ pour tout réel x.