Nom : Prénom : Groupe :

Mathématiques - Devoir Surveillé 2
Vendredi 10 octobre 2025 - Durée : 1h30

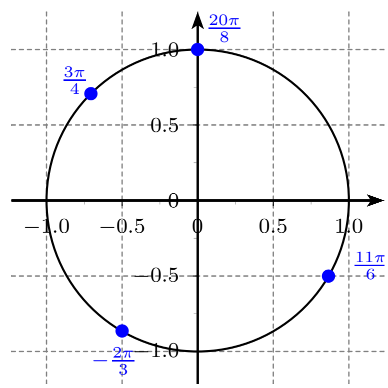
Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 ***(≃ 10-15 min)***

1. Placer, le plus précisement possible, les angles suivants sur le cercle trigonométrique ci-dessous.

(a) $\frac{11\pi}{6}$ (b) $\frac{3\pi}{4}$ (c) $-\frac{2\pi}{3}$ (d) $\frac{20\pi}{8}$



2. Donner la mesure principale des angles suivants :

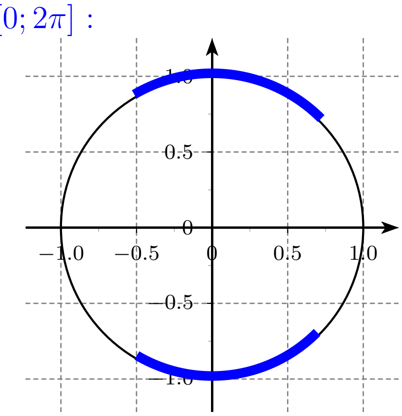
(a) $\theta_1 = \frac{53\pi}{2} = \frac{52\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 26\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Sa mesure principale est donc $\frac{\pi}{2}$

(b) $\theta_2 = -\frac{55\pi}{6} = -\frac{60\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = -10\pi + \frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$. Sa mesure principale est donc $\frac{5\pi}{6}$.

(c) $\theta_3 = \frac{2023\pi}{4} = \frac{2000\pi}{4} + \frac{24\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 500\pi + 6\pi - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$.
Sa mesure principale est donc $-\frac{\pi}{4}$

3. Représenter sur le cercle trigonométrique les angles x qui vérifient la condition ci-dessous puis écrire l'intervalle des solutions appartenant à $[0; 2\pi]$:

$$-\frac{1}{2} < \cos(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \Leftrightarrow$$



Donc $S = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{4\pi}{3}; \frac{7\pi}{4}\right]$

Exercice 2 *(≃ 10-15 min)*

1. Donner les valeurs exactes (sans justifier) de :

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \qquad \cos\left(\frac{211\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

2. Donner les valeurs exactes de (en expliquant la démarche) :

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}{\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

3. Déterminer les valeurs (sans justifier) de

$$\arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} \qquad \arctan\left(\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = -\frac{\pi}{3} \qquad \arctan\left(\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = -\frac{\pi}{6}$$

Pour le dernier résultat on utilise le fait que la fonction tan est de période π :

$$\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \tan\left(\frac{5\pi}{6}-\pi\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \arctan\left(\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = -\frac{\pi}{6}$$

Exercice 3 *(≃ 20-25 min)*

1. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\cos(3t) = \cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)$

$$\begin{aligned} & \cos(3t) = \cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right) \\ \Leftrightarrow\ & 3t = t+\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad \text{ou} \quad 3t = -\left(t+\frac{\pi}{3}\right)+2k\pi \\ \Leftrightarrow\ & 2t = \frac{\pi}{3}+2k\pi \quad \text{ou} \quad 3t = -t-\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ \Leftrightarrow\ & t = \frac{\pi}{6}+k\pi \quad \text{ou} \quad 4t = -\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ \Leftrightarrow\ & t = \frac{\pi}{6}+k\pi \quad \text{ou} \quad t = -\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Les solutions sont donc

$$S = \left\{\frac{\pi}{6}+k\pi; -\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2}; \forall k\in\mathbb{Z}\right\}$$

(b) Donner les solutions de l'équation précédente dans $[0, 2\pi[$.
On fait varier les valeurs entières de k dans chaque solution.
Pour la première partie des solutions on peut prendre $k = 1$ ou 2.
Pour la deuxième partie des solutions on peut prendre $k = 1, 2, 3$ ou 4.

$$S_{[0;2\pi[} = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{5\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}; \frac{17\pi}{12}; \frac{23\pi}{12}\right\}$$

2. Mettre la fonction $f(t) = 7\cos(3t) - 7\sin(3t)$ sous la forme $A\sin(\omega t + \varphi)$
   On pose $a =$ coefficient de $\cos = 7$ et $b =$ coefficient de $\sin = -7$. On pose
   $$A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{49 + 49} = \sqrt{49 \times 2} = 7\sqrt{2}$$
   On a alors $\cos(\varphi) = \dfrac{b}{A} = -\dfrac{7}{7\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\varphi) = \dfrac{a}{A} = \dfrac{7}{7\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$. Donc
   $$f(t) = 7\sqrt{2}\sin\left(3t + \frac{3\pi}{4}\right)$$

3. Dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   (a) $\sin(x + 31\pi) = -\sin(x)$. VRAI
   En effet $\sin(x + 31\pi) = \sin(x + \pi) = -\sin(x)$
   (b) $\cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = -\sin(x)$ FAUX
   Il suffit de tester pour $x = \dfrac{\pi}{2}$: $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}\right) = 1$ alors que $-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.
   (c) $\sin(2x)\cos(2x) = \sin(4x)$ FAUX
   Il suffit de tester pour $x = \dfrac{\pi}{8}$: $\sin\left(\frac{2\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$ alors que $\sin\left(\frac{4\pi}{8}\right) = 1$.
   (d) $\sin(2x) = 2\sin(x)$ FAUX
   Il suffit de tester pour $x = \dfrac{\pi}{2}$: $\sin\left(\frac{2\pi}{2}\right) = 0$ alors que $2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

Exercice 4 ***(≃ 10-15 min)***

1. Développer et **calculer** chacune des sommes suivantes :
   (a) $S_1 = \displaystyle\sum_{n=17}^{27} \frac{1}{10} = 11 \times \frac{1}{10}$
   (b) $S_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{5} k \times (k+2) = 3 + 8 + 15 + 24 + 35 = 85$
2. Ecrire les sommes suivantes en utilisant un signe Σ :
   (a) $S_3 = \dfrac{5}{7} + \dfrac{7}{9} + \dfrac{9}{11} + \cdots + \dfrac{15}{17} = \displaystyle\sum_{k=3}^{8} \frac{2k-1}{2k+1}$ ou aussi $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} \frac{2k+5}{2k+7}$
   (b) $S_4 = 16 + 25 + 36 + \ldots + 400 = \displaystyle\sum_{k=4}^{20} k^2$

Exercice 5 ***(≃ 20-25 min)***

1. Répondre par **Vrai ou Faux en justifiant** (toute réponse non justifiée ne rapporte rien).
   (a) $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 + 2x + 1 = 0$ VRAI
   Il suffit de trouver une solution (il n'y en a qu'une) : $x = -1$.
   Donc il existe bien un $x \in \mathbb{R}$ qui vérifie l'égalité.
   (b) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = 100 \Leftrightarrow x = 10$ FAUX
   Pour $x = -10$ la propriété $x^2 = 100$ est vraie alors que la propriété $x = 10$ est fausse.
   Donc l'implication vers la droite est fausse.
   (c) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq -2$ VRAI
   Ecrivons la contraposée de cette implication : $x = -2 \Rightarrow x^2 = 4$. Cette implication est vraie, donc l'implication d'origine est vraie aussi.

(d) $\forall x \in \mathbb{R}, x < 0 \Rightarrow x < 1$ VRAI
Cette implication est vraie car $]-\infty; O[$ est inclus dans $]-\infty; 1[$. Autrement dit, tout nombre réel inférieur à 0 est aussi inférieur à 1.

(e) Soient a et b deux réels. $ab \leq 0 \Rightarrow a \leq 0$ et $b \geq 0$. FAUX
Il suffit de prendre un contre-exemple : $a = 1$ et $b = -2$. La propriété $ab < 0$ est vraie alors que la propriété $a \leq 0$ et $b \geq 0$ est fausse.

2. Soit la propriété $P_1 : \exists x \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall b \in \mathbb{R} : \sqrt{x} < b$.

(a) Écrire la négation de P_1.

$$nonP1 : \forall x \in \mathbb{R}^+ \exists b \in \mathbb{R} \text{ tel que } : \sqrt{x} \geq b$$

(b) La propriété non-P_1 est-elle vraie ou fausse ?
La propriété non P_1 est vraie car, pour tout réel prositif x on peut prendre $b = -1$, on aura bien $\sqrt{x} \geq b$.

(c) La propriété P_1 est-elle vraie ou fausse ?
Comme non P_1 est vraie, alors P_1 est fausse.

3. Donner un exemple de fonction qui vérifie la propriété

$$P_3 : \exists m \in [0; +\infty[\text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R} : f(x) > m$$

La propriété P_3 se traduit par : la fonction f admet un minorant positif.
On peut donc prendre les fonctions $f(x) = x^2 + 1$ ou $f(x) = e^x$ par exemple.