

Mathématiques - Devoir Surveillé 2

Vendredi 9 octobre 2026 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1

1. Donner la mesure principale de chacun des angles

$$\theta_1 = -\frac{31\pi}{4}, \quad \theta_2 = \frac{2027\pi}{6}, \quad \theta_3 = \frac{19\pi}{3}.$$

On réduit modulo 2π et on choisit le représentant dans $] -\pi, \pi]$:

$$\theta_1 = -\frac{31\pi}{4} = -\frac{32\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = -4 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{\pi}{4}} + 2k\pi,$$

$$\theta_2 = \frac{2027\pi}{6} = \frac{2028\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = 168 \cdot 2\pi - \frac{\pi}{6} = \boxed{-\frac{\pi}{6}} + 2k\pi,$$

$$\theta_3 = \frac{19\pi}{3} = \frac{18\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 3 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{3} = \boxed{\frac{\pi}{3}} + 2k\pi.$$

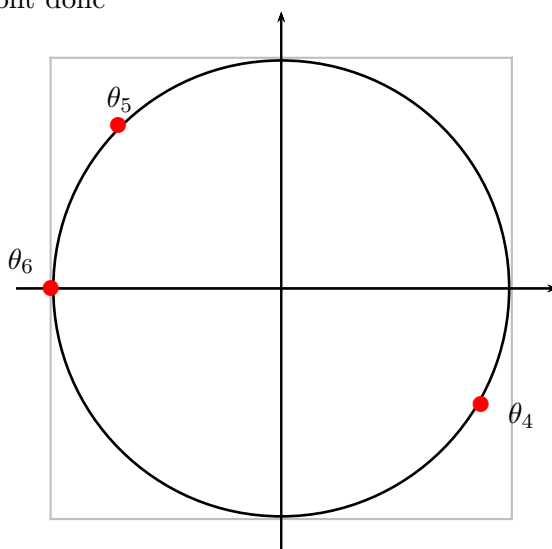
2. Placer très précisément sur le cercle trigonométrique les trois angles

$$\theta_4 = \frac{11\pi}{6}, \quad \theta_5 = -\frac{5\pi}{4}, \quad \theta_6 = \frac{274\pi}{2}.$$

On a

$$\theta_4 \equiv -\frac{\pi}{6}, \quad \theta_5 \equiv \frac{3\pi}{4}, \quad \theta_6 = 137\pi \equiv \pi \pmod{2\pi}.$$

Les points correspondants sont donc



Exercice 2

1. Donner les valeurs (sans justifier) de

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right), \quad \sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right), \quad \tan\left(\frac{4\pi}{3}\right).$$

$$\boxed{\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}}, \quad \boxed{\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}}, \quad \boxed{\tan\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt{3}}.$$

2. Calculer les valeurs (en expliquant la démarche) de

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\ \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

3. Déterminer les valeurs (en expliquant la démarche) de

$$\arctan(-1) \quad \text{et} \quad \arctan\left(\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right).$$

Comme $\arctan$ prend ses valeurs dans $] -\pi/2, \pi/2[$,

$$\boxed{\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}}.$$

$$\boxed{\arctan\left(\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \arctan\left(\tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right) = -\frac{\pi}{3}}.$$

Exercice 3

1. Écrire en fonction de $\sin(x)$ ou $\cos(x)$ la fonction

$$f(x) = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) - 3\sin(x + 5\pi).$$

On utilise $\cos(x + 3\pi/2) = \sin x$ et $\sin(x + 5\pi) = -\sin x$:

$$f(x) = \sin x - 3(-\sin x) = \boxed{4\sin x}.$$

2. Mettre la fonction $f(t) = 3\cos(3t) - 3\sqrt{3}\sin(3t)$ sous la forme $A\sin(\omega t + \varphi)$.

On écrit

$$A\sin(3t + \varphi) = A\cos\varphi\sin(3t) + A\sin\varphi\cos(3t).$$

Il faut donc $A \cos \varphi = -3\sqrt{3}$ et $A \sin \varphi = 3$. D'où

$$A = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = 6, \quad \sin \varphi = \frac{1}{2}, \quad \cos \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On peut prendre $\varphi = 5\pi/6$. Ainsi

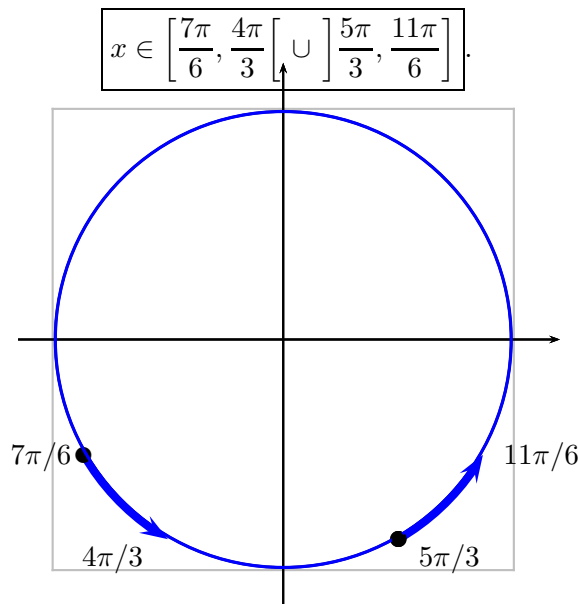
$$f(t) = 6 \sin \left(3t + \frac{5\pi}{6} \right)$$

3. Représenter sur le cercle les angles θ qui vérifient

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin(x) \leq -\frac{1}{2},$$

puis donner l'intervalle des solutions appartenant à $[0; 2\pi[$.

Les valeurs $\sin x = -1/2$ correspondent à $7\pi/6$ et $11\pi/6$; les valeurs $\sin x = -\sqrt{3}/2$ correspondent à $4\pi/3$ et $5\pi/3$. En tenant compte des inégalités stricte et large :



Les extrémités $4\pi/3$ et $5\pi/3$ sont exclues; les extrémités $7\pi/6$ et $11\pi/6$ sont incluses.

4. Soit $\theta \in]-\pi; 0]$ tel que $\cos(\theta) = 5/13$. Donner la valeur exacte de $\sin(\theta)$.

Comme $\theta \in]-\pi; 0]$ on sait que $\sin \theta < 0$. D'après la relation $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, on peut écrire que :

$$\sin \theta = -\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = -\sqrt{\frac{144}{169}} = \boxed{-\frac{12}{13}}.$$

5. Résoudre sur $[0; 2\pi[$:

$$\sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) &= -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) &= \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \\ \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} &= -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 2x - \frac{\pi}{4} = \pi - \left(-\frac{\pi}{6} \right) + 2k\pi \\ \Leftrightarrow 2x &= \frac{\pi}{12} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 2x = \frac{17\pi}{12} + 2k\pi \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\pi}{24} + k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{17\pi}{24} + k\pi \end{aligned}$$

avec $k \in \mathbb{Z}$.

La restriction à $[0; 2\pi[$ donne

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{24}, \frac{17\pi}{24}, \frac{25\pi}{24}, \frac{41\pi}{24} \right\}.$$

Exercice 4

1. Donner la contraposée de : « tu portes ton casque en trottinette $\Rightarrow$ tu ne prends pas une amende de 135 euros ».

La contraposée est :

$$\boxed{\text{Tu prends une amende de 135 euros} \Rightarrow \text{tu ne portes pas ton casque en trottinette.}}$$

2. On considère la propriété $P_1 : \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ tel que $x + y = 0$.

(a) Donner la négation de P_1 .

(b) La propriété P_1 est-elle vraie ?

(c) La propriété non- P_1 est-elle vraie ?

(a) La négation est

$$\boxed{\exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall y \in \mathbb{R}, x + y \neq 0}.$$

(b) Oui, P_1 est vraie : pour tout $x \in \mathbb{R}$, il suffit de choisir $y = -x$.

(c) Non, la propriété non- P_1 est fausse, puisque P_1 est vraie.

3. Donner un exemple de nombre N qui vérifie la propriété

$$P_2 : \exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } N = 3k.$$

Par exemple, $\boxed{N = 6}$ convient en prenant $k = 2$ (et plus généralement tout multiple de 3 convient).

4. Écrire avec un signe Sigma :

$$S_1 = 7 + 9 + 11 + \cdots + 57 + 59, \quad S_2 = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 + \cdots + 1024 - 2048.$$

$$\boxed{S_1 = \sum_{k=0}^{26} (7 + 2k)}, \quad \boxed{S_2 = \sum_{k=0}^{11} (-2)^k}.$$

Exercice 5

Répondre par Vrai ou Faux en justifiant.

$$1. \sum_{k=0}^3 \frac{k}{k+2} = \frac{89}{60}.$$

Faux, car

$$\sum_{k=0}^3 \frac{k}{k+2} = 0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{3}{5} = \frac{20 + 30 + 36}{60} = \boxed{\frac{86}{60} = \frac{43}{30} \neq \frac{89}{60}}.$$

$$2. \forall x \in \mathbb{R} : \cos(2x) = \cos^2(x) - 1.$$

Faux. En effet, $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$. Par exemple, pour $x = 0$, le membre de gauche vaut 1 et le membre de droite vaut 0.

$$3. \forall x \in \mathbb{R}^* : \frac{2 - \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{1}{x^2}} = -1.$$

Faux. Pour $x = 1$, le membre de gauche vaut $\frac{1}{3}$, et non -1 .

$$4. \exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x^2 - 4x + 4 = 0.$$

Vrai, car $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$ et donc $x = \boxed{2}$ convient.

$$5. \exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } \frac{\frac{2}{x}}{5} = \frac{2}{\frac{x}{5}}.$$

Faux. On peut réécrire l'égalité :

$$\frac{\frac{2}{x}}{5} = \frac{2}{\frac{x}{5}} \Leftrightarrow \frac{2}{x} \times \frac{1}{5} = 2 \times \frac{5}{x} \Leftrightarrow \frac{2}{5x} = \frac{10}{x} \Leftrightarrow \frac{2}{5} = 10 \Leftrightarrow 2 = 50$$

L'égalité impliquerait $2 = 50$, ce qui est impossible.