

Nom :

Prénom :

Groupe :

Mathématiques - Devoir Surveillé 3 - correction

Vendredi 22 novembre 2024 - Durée : 1h00

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1

1. (a) Mettre la fonction $f_1(t) = -4\sqrt{3}\cos(2t) + 4\sin(2t)$ sous la forme $A\sin(\omega t + \varphi)$ avec $A > 0$

On note $a = -4\sqrt{3}$ et $b = 4$.

On pose alors $A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{48 + 16} = 8$.

On pose ensuite

$$\begin{cases} \cos(\varphi) = \frac{b}{A} = \frac{1}{2} \\ \sin(\varphi) = \frac{a}{A} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{3}$$

Conclusion

$$f(t) = 8\sin\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)$$

- (b) Déterminer la période et l'amplitude de f_1 .

Amplitude = $A = 8$

Période = $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$

2. On rappelle que, pour tout réels a et b on a : $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$.

A l'aide de cette formule, déterminer la période de la fonction. $f_2(t) = \sin(27\pi t)\sin(3\pi t)$

On utilise la formule pour écrire f_2 sous forme d'une somme :

$$f_2(t) = \frac{1}{2}(\cos(27\pi - 3\pi) - \cos(27\pi + 3\pi)) = \frac{1}{2}(\cos(24\pi) - \cos(30\pi))$$

f_2 est donc la somme de deux fonctions de périodes différents : $T_1 = \frac{2\pi}{24\pi} = \frac{1}{12}$ et $T_2 = \frac{2\pi}{30\pi} = \frac{1}{15}$.

Donc la période de f_2 est $T = \text{ppcm}\left(\frac{1}{12}, \frac{1}{15}\right) = \frac{1}{3}$.

3. Déterminer la période des fonctions suivantes :

(a) $f_3(t) = -2\sin\left(\frac{t}{4}\right)$

La période de f_3 est $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$

(b) $f_4(t) = \cos(100\pi(t + 0.01)) + 1$

La période de f_4 est $T = \frac{2\pi}{100\pi} = \frac{1}{50}$

Exercice 2

1. Parmi les équations différentielles suivantes, dire celles qui sont homogènes, celles qui sont linéaires, celles qui sont d'ordre 1 et celles qui sont à coefficients constants.

(a) $ty'(t) + y(t) = -10 \cos(5t)$

(c) $y'(t) - 7y(t) + t^2 = 0$

(b) $y'(t) \times y(t) = 0$

(d) $y''(t) - y(t) = 0$

Les équations suivantes sont homogènes : (b) et (d)

Les équations suivantes sont linéaires : (a), (c) et (d)

Les équations suivantes sont d'ordre 1 : (a), (b) et (c)

Les équations suivantes sont à coefficients constants : (c) et (d)

2. La fonction $f(t) = \cos(5t) - \sin(5t)$ est-elle solution de l'équation différentielle suivante ?

$$y'(t) - 5y(t) = -10 \cos(5t)$$

On calcule la dérivée de f puis on remplace dans l'équation :

$$f'(t) = -5 \sin(5t) - 5 \cos(5t)$$

Donc

$$\begin{aligned} f'(t) - 5f(t) &= -5 \sin(5t) - 5 \cos(5t) - 5(\cos(5t) - \sin(5t)) \\ &= -5 \sin(5t) - 5 \cos(5t) - 5 \cos(5t) + 5 \sin(5t) \\ &= -10 \cos(5t) \end{aligned}$$

Donc f est solution.

3. Donner une équation différentielle, linéaire, homogène admettant $g(t) = 3e^{-4t}$ comme solution.

Considérons que g est de la forme $ke^{-\frac{t}{\tau}}$ alors $\tau = \frac{1}{4}$.

Donc g est solution de l'équation différentielle homogène

$$\tau y'(t) + y(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}y'(t) + y(t) = 0$$

Exercice 3 Résoudre les équations différentielles suivantes :

1.
$$\begin{cases} 3y'(t) + y(t) = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

L'équation est homogène et sous forme canonique avec $\tau = 3$
donc les solutions sont de la forme $y(t) = Ce^{-\frac{t}{3}}$ pour tout $C \in \mathbb{R}$.

De plus $y(0) = 2$ donc $Ce^0 = 2$ donc $C = 2$.

La solution est donc $y(t) = 2e^{-\frac{t}{3}}$

2.
$$\begin{cases} y'(t) - 5y(t) = 7e^{3t} \quad (E) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

L'équation n'est pas homogène.

étape 1 : On commence par déterminer les solutions de l'équation homogène associée

$$y'(t) - 5y(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{5}y'(t) + y(t) = 0 \Rightarrow y_h(t) = Ce^{5t} \quad C \in \mathbb{R}$$

étape 2 : On cherche une solution particulière de (E).

On pose $y_p(t) = ae^{3t}$.

On a $y'_p(t) = 3ae^{3t}$, on veut que y_p soit solution donc on remplace dans (E) :

$$3ae^{3t} - 5ae^{3t} = 7e^{3t} \Leftrightarrow -2a = 7 \Leftrightarrow a = -\frac{7}{2}$$

Donc $y_p(t) = -\frac{7}{2}e^{3t}$.

étape 3 : Les solutions de (E) sont donc les fonctions de la forme

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = Ce^{5t} - \frac{7}{2}e^{3t} \quad C \in \mathbb{R}$$

étape 4 : Calcul de C grâce à la condition initiale :

$$y(0) = 1 \Rightarrow Ce^0 - \frac{7}{2}e^0 = 1 \Rightarrow C = \frac{9}{2}$$

Conclusion : la solution est $y(t) = \frac{9}{2}e^{5t} - \frac{7}{2}e^{3t}$

3.
$$(3t+1)y'(t) - y(t) = 0$$

L'équation est à coefficients non constants. On applique la méthode de résolution :

$$\begin{aligned} (3t+1)y'(t) - y(t) &= 0 \Leftrightarrow (3t+1)y'(t) = y(t) \\ &\Leftrightarrow \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1}{3t+1} \\ &\Leftrightarrow \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{3t+1} \\ &\Leftrightarrow \ln|y(t)| = \frac{1}{3} \times \ln|3t+1| + C \quad C \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow y(t) = ke^{\frac{1}{3} \times \ln|3t+1|} \quad k \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow y(t) = ke^{\ln((3t+1)^{\frac{1}{3}})} \quad k \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow y(t) = k(3t+1)^{\frac{1}{3}} \quad k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

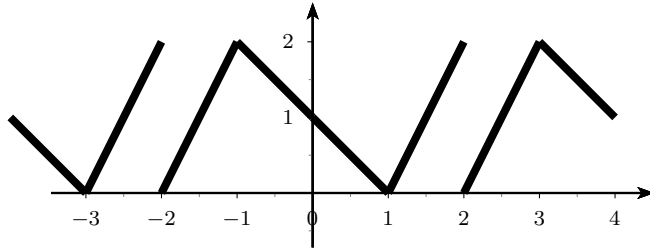
Exercice 4

1. Déterminer la parité des fonctions suivantes :

(a) $f_1(t) = -4$

On a $f_1(-t) = -4 = f_1(t)$ donc f_1 est paire.

(b) $f_2(t) = t^5 + 6t^3 - 8t$

On a $f_2(-t) = (-t)^5 + 6(-t)^3 - 8(-t) = -t^5 - 6t^3 + 8t = -(t^5 + 6t^3 - 8t) = -f_2(t)$.Donc f_2 est impaire.

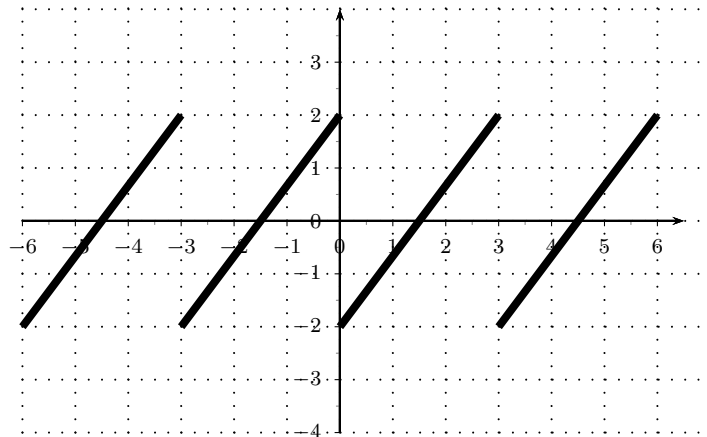
(c)

La courbe n'est pas symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, donc la fonction n'est pas paire.

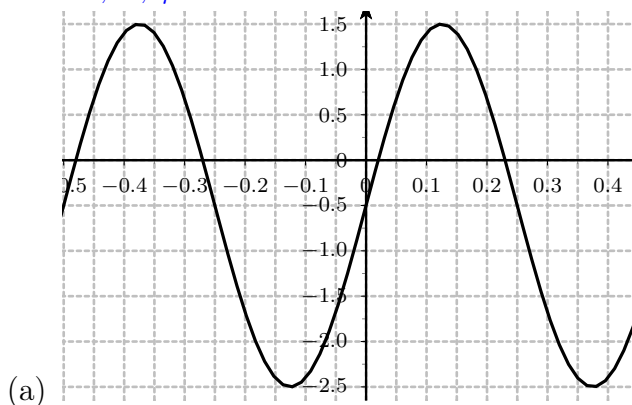
La courbe n'est pas symétrique par rapport à l'origine, donc la fonction n'est pas impaire.

2. Tracer sur l'intervalle $[-6, 6]$ la fonction f , définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant toutes les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} f(t) = \frac{4}{3}t - 2 \text{ sur } [0, 3] \\ f \text{ est impaire} \\ f \text{ est 6-périodique} \end{cases}$$

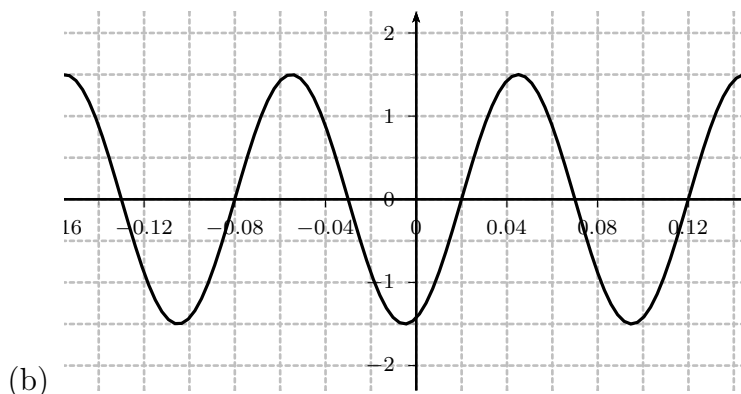


Exercice 5

1. Les deux fonctions représentées ci-dessous sont de la forme $f(t) = A \sin(\omega t + \varphi) + C$. Déterminer dans chaque cas les valeurs de A , ω , φ et C 

(a)

Amplitude de $f = \frac{1}{2}(Max - Min) = 2$ Période de $f : T = 0,5$ donc pulsation de $f : \omega = \frac{2\pi}{T} = 4\pi$. $C = \text{Offset} = \text{Valeur moyenne de } f = -0,5$. $\Delta t = 0$ donc $\varphi = 0$ Donc $f(t) = 2 \sin(4\pi t) - \frac{1}{2}$



(b)

Amplitude de $f = \frac{1}{2}(Max - Min) = 1,5$

Période de $f : T = 0,1$ donc pulsation de $f : \omega = \frac{2\pi}{T} = 20\pi$.

$C = \text{Offset} = \text{Valeur moyenne de } f = 0$.

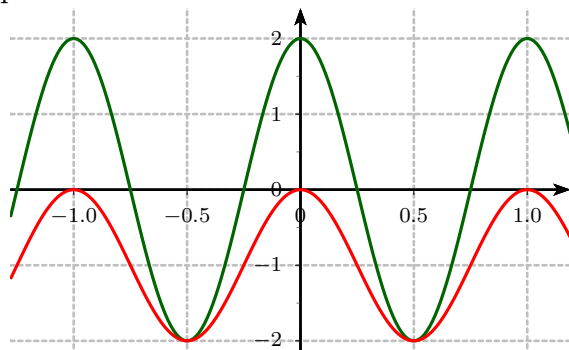
$\Delta t = +0,02$ donc $\varphi = \omega \Delta t = 0,02 * 20\pi = \frac{4}{5}\pi$

Donc $f(t) = 1,5 \sin\left(20\pi t + \frac{4}{5}\pi\right)$

2. On a représenté la fonction $f(t) = 2 \cos(2\pi t)$ sur chacun des graphes ci-dessous. Représenter alors sur chaque graphique f_1 et f_2 :

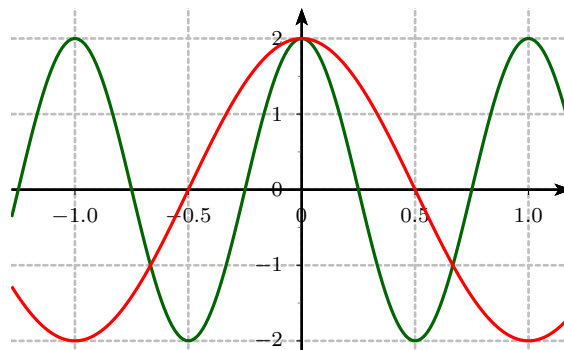
a) $f_1(t) = \frac{1}{2}f(t) - 1$

On divise l'amplitude par 2
puis on fait un offset de -1 :



b) $f_2(t) = f\left(\frac{1}{2}t\right)$

La période est multipliée par 2



3. Sur le graphe ci-dessous on a représenté une fonction g de période 8. On pose $f_3(t) = f(t+a) + b$. Déterminer a et b pour que f_3 soit impaire puis la représenter sur le graphe.

On pose $b = -0,5$ pour avoir une valeur moyenne nulle

et $a = +1$ pour avancer la courbe de 1.

On obtient la courbe en rouge qui est symétrique par rapport à l'origine.

