

Nom :

Prénom :

Groupe :

Mathématiques - Devoir Surveillé 4 - correction

Vendredi 20 décembre 2024 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1

1. Déterminer le module de :

(a) $Z_1 = \frac{1-7i}{3+i}$.

$$|Z_1| = \frac{|1-7i|}{|3+i|} = \frac{\sqrt{1+7^2}}{\sqrt{3^2+1}} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{10}} = \sqrt{5}$$

(b) $Z_2 = (2-i)^6$

$$|Z_2| = |2-i|^6 = \sqrt{4+1}^6 = \sqrt{5}^6 = 5^3 = 125$$

(c) $Z_3 = 17e^{i\frac{\pi}{8}} \times 3e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$|Z_3| = 17 * 3 = 51$$

2. Écrire sous forme exponentielle :

(a) $Z_4 = \frac{R+Ri}{iC\omega}$ où R , C et ω sont des réels positifs

Calculons le module et un argument de Z_4 :

$$|Z_4| = \frac{|R+Ri|}{|iC\omega|} = \frac{\sqrt{R^2+R^2}}{C\omega} = \frac{R\sqrt{2}}{C\omega}$$

et

$$\arg(Z_4) = \arg(R+Ri) - \arg(iC\omega) = \arctan\left(\frac{R}{R}\right) - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$$

Donc la forme exponentielle est

$$Z_4 = \frac{R\sqrt{2}}{C\omega} \times e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

(b) $Z_5 = \frac{3e^{i\frac{\pi}{6}}}{5e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{3}{5}e^{i(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4})} = \frac{3}{5}e^{-i\frac{\pi}{12}}$

(c) $Z_6 = (-2-2i)(i-\sqrt{3})$

Calculons le module et un argument de Z_6 :

$$|Z_6| = |-2-2i| \times |i-\sqrt{3}| = \sqrt{8} \times 2 = 4\sqrt{2}$$

et

$$\arg(Z_6) = \arg(-2 - 2i) + \arg(i - \sqrt{3}) = -\frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$$

Donc la forme exponentielle de Z_6 est

$$Z_6 = 4\sqrt{2} \times e^{i\frac{\pi}{12}}$$

3. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de

$$(a) \quad Z_7 = \frac{7 - 4i}{5 + 11i} = \frac{(7 - 4i)(5 - 11i)}{(5 + 11i)(5 - 11i)} = \frac{35 - 77i - 20i - 44}{25 + 121} = \frac{-9 - 97i}{146}.$$

$$\text{Donc } \operatorname{Re}(Z_7) = -\frac{9}{146} \text{ et } \operatorname{Im}(Z_7) = -\frac{97}{146}$$

$$(b) \quad Z_8 = (1 - 3i)^2 - 4i^2 = 1 - 6i - 9 + 4 = -4 - 6i. \text{ Donc } \operatorname{Re}(Z_8) = -4 \text{ et } \operatorname{Im}(Z_8) = -6$$

$$(c) \quad Z_9 = (e^{i\pi} + e^{i\frac{\pi}{2}})(e^{-i\frac{\pi}{2}} + 2e^{-2i\pi}) = (-1 + i)(-i + 2) = i - 2 + 1 + 2i = -1 + 3i.$$

$$\text{Donc } \operatorname{Re}(Z_9) = -1 \text{ et } \operatorname{Im}(Z_9) = 3$$

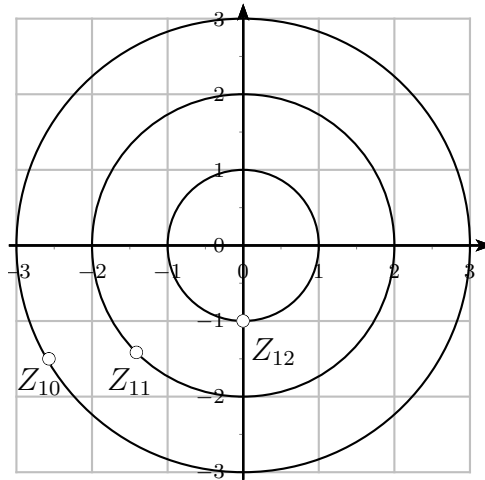
Exercice 2

1. Placer précisément les points d'affixe Z_{10} , Z_{11} et Z_{12}

$$(a) \quad Z_{10} = 3e^{i\frac{7\pi}{6}}$$

$$(b) \quad Z_{11} = -2e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$(c) \quad Z_{12} = \frac{1}{i}$$



2. Dans chacun des cas, déterminer un nombre complexe qui satisfait les propriétés :

$$(a) \quad \operatorname{Re}(Z_{13}) = 6 \text{ et } \operatorname{Arg}(Z_{13}) = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Comme } \operatorname{Arg}(Z_{13}) = \frac{\pi}{4}, \text{ alors } \operatorname{Re}(Z_{13}) = \operatorname{Im}(Z_{13}). \text{ Donc } Z_{13} = 6 + 6i.$$

$$(b) \quad \operatorname{Im}(Z_{14}) = -5 \text{ et } |Z_{14}| = 13$$

$$\text{On sait que } |Z_{14}| = \sqrt{\operatorname{Re}(Z_{14})^2 + \operatorname{Im}(Z_{14})^2}$$

$$\text{donc } 13^2 = \operatorname{Re}(Z_{14})^2 + (-5)^2 \text{ donc } \operatorname{Re}(Z_{14})^2 = 169 - 25 = 144.$$

$$\text{Donc } \operatorname{Re}(Z_{14}) = 12 \text{ ou } -12.$$

$$\text{Donc } Z_{14} = 12 - 5i \text{ ou } -12 - 5i.$$

3. Linéariser, en utilisant les formules d'Euler : $f(t) = \sin(3t) \sin(5t)$:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sin(3t) \sin(5t) \\ &= \frac{e^{3it} - e^{-3it}}{2i} \times \frac{e^{5it} - e^{-5it}}{2i} \\ &= \frac{e^{8it} - e^{-2it} - e^{2it} + e^{8it}}{-4} \\ &= \frac{e^{8it} + e^{8it}}{-4} + \frac{-e^{-2it} - e^{2it}}{-4} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{e^{8it} + e^{8it}}{2} + \frac{1}{2} \frac{e^{-2it} + e^{2it}}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \cos(8t) + \frac{1}{2} \cos(2t) \end{aligned}$$

Exercice 3 Résoudre dans $\mathbb{C}$

1. $Z^2 + 2Z + 37 = 0$.

Calculons le discriminant : $\Delta = 4 - 4 \times 37 = -144$. On a donc 2 solutions complexes :

$$Z_1 = \frac{-2 - i\sqrt{144}}{2} = \frac{-2 - 12i}{2} = -1 - 6i \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{-2 + i\sqrt{144}}{2} = \frac{-2 + 12i}{2} = -1 + 6i$$

2. $Z^2 + 5Z - 6 = 0$

Calculons le discriminant : $\Delta = 25 + 4 \times 6 = 49$. On a donc 2 solutions réelles :

$$Z_1 = \frac{-5 - \sqrt{49}}{2} = \frac{-5 - 7}{2} = -6 \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{-5 + 7}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

3. $2iZ^2 + (1 - i)Z + (i - 1) = 0$

Calculons le discriminant : $\Delta = (1 - i)^2 - 4 \times 2i \times (i - 1) = 1 - 2i - 1 + 8 + 8i = 8 + 6i$.

On cherche les racines carrées complexes de Δ :

$$\begin{aligned} (\alpha + i\beta)^2 = 8 + 6i &\Leftrightarrow \alpha^2 + 2i\alpha\beta - \beta^2 = 8 + 6i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 8 \\ 2\alpha\beta = 6 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 10 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha^2 = 18 \\ 2\alpha\beta = 6 \\ 2\beta^2 = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \text{ ou } -3 \\ 2\alpha\beta = 6 \\ \beta = 1 \text{ ou } -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Comme $\alpha\beta > 0$, α et β sont de même signe. Ainsi, les racines carrées de Δ sont $3 + i$ et $-3 - i$.
Les solutions de l'équations sont donc :

$$Z_1 = \frac{-(1 - i) - (3 + i)}{2 \times 2i} = \frac{-4}{4i} = i$$

et

$$Z_2 = \frac{-(1-i) + (3+i)}{2 \times 2i} = \frac{2+2i}{4i} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

Exercice 4 Calculer les limites suivantes.

1. $\lim_{t \rightarrow 3} \frac{t^2 - 2t - 3}{2t^2 - 18}$

On a une forme indéterminée de type " $\frac{0}{0}$ "...on factorise chaque polynôme avec ses racines

$$\lim_{t \rightarrow 3} \frac{t^2 - 2t - 3}{2t^2 - 18} = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{(t-3)(t+1)}{2(t-3)(t+3)} = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{(t+1)}{2(t+3)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

2. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2 - 2t - 3}{2t^2 - 18} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2}{2t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

3. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2 - 2t - 3}{e^{t-5}}$. On a une forme indéterminée de la forme $\frac{\infty}{\infty}$. D'après le théorème de croissances comparées on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2 - 2t - 3}{e^{t-5}} = 0$$

4. $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{3t^2} + \frac{2}{t} - 4 = 0 + 0 - 4 = -4$.

5. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{2}{t+3}\right) = \ln(0^+) = -\infty$

6. $\lim_{t \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{t^2}} = e^{-\infty} = 0$

7. $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\ln(2-10t)}{t+1}$. On a une forme indéterminée de la forme $\frac{\infty}{\infty}$. D'après le théorème de croissances comparées on a :

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\ln(2-10t)}{t+1} = 0$$