

Mathématiques - Devoir Surveillé 3 - Sujet 1

Vendredi 8 juin 2018 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et la présentation.

Exercice 1

1. Pour chacune des intégrales suivantes dire si elle est convergente ou divergente :

$$(a) \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt \qquad (b) \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt \qquad (c) \int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t}} dt$$

2. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$ est convergente.

3. (a) Soit $X > 1$. Calculer $\int_1^X \frac{1}{(2x+1)^2+1} dx$

(b) En déduire que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(2x+1)^2+1} dx$ est convergente.

4. Les affirmations suivantes sont fausses. Trouver dans chacun des cas un contre-exemple le prouvant.

(a) $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0 \Rightarrow \int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge.

(b) Soit f et g deux fonctions telles que $0 \leq f(t) \leq g(t)$ pour tout $t \geq 1$. Alors :

$$\int_1^{+\infty} g(t) dt \text{ diverge} \Rightarrow \int_1^{+\infty} f(t) dt \text{ diverge.}$$

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes par la méthode de votre choix :

$$1. I = \int_0^\pi \cos^2(x) \sin(x) dx$$

$$4. L = \int_0^{\frac{1}{2}} (-x+1)e^{2x} dx$$

$$2. J = \int_0^1 xe^{x^2+2} dx$$

$$5. M = \int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx$$

$$3. K = \int_{-\pi}^\pi \cos^2(3x) \sin(2x) dx$$

Exercice 3

1. Montrer que $2t^2 + 17t + 36 = (2t+9)(t+4)$.

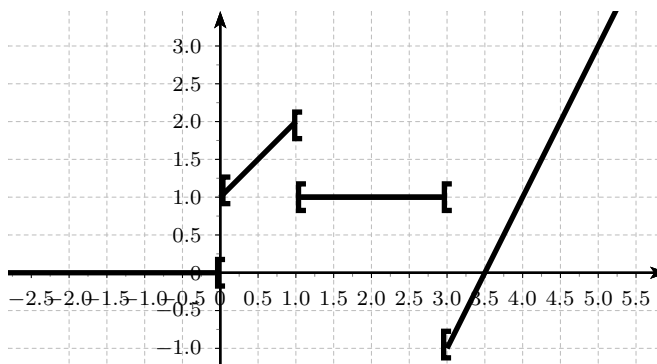
2. Montrer que $\int_1^8 \frac{t}{2t^2+17t+36} dt = -4 \ln(12) - \frac{9}{2} \ln(11) + 13 \ln(5)$

3. Calculer $I = \int_1^2 \frac{x^5}{2x^6+17x^3+36} dx$ en posant le changement de variable $t = x^3$.

1. Tracer, en justifiant votre démarche, la courbe représentative de la fonction :

$$f(t) = (-t + 1)\mathcal{U}(t - 1) + (5t - 15)\mathcal{U}(t - 3) + (16 - 4t)\mathcal{U}(t - 4)$$

2. Donner l'expression de la fonction suivante à l'aide de fonctions échelon :



Exercice 5

1. Démontrer, en partant de la définition, que la transformée de Laplace de $f(t) = e^{-at}\mathcal{U}(t)$ est $\mathcal{L}_f(p) = \frac{1}{p+a}$.
2. Déterminer les transformées de Laplace des fonctions suivantes :
 - (a) $f_1(t) = e^{2t}\mathcal{U}(t)$
 - (b) $f_2(t) = (2t + 1)^2\mathcal{U}(t)$
 - (c) $f_3(t) = \cos\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)\mathcal{U}(t)$