

Mathématiques - Devoir Surveillé 3

Vendredi 29 mai 2026 - Durée : 1h10

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Calculer par la méthode de votre choix

1. $I_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2x + 1) \sin(3x) dx$

Méthode : Intégration par parties. On pose :

$$\begin{cases} u = 2x + 1 & \Rightarrow u' = 2 dx \\ v' = \sin(3x) dx & \Rightarrow v = -\frac{1}{3} \cos(3x) \end{cases}$$

Ainsi,

$$I_1 = \left[-\frac{2x+1}{3} \cos(3x) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{2}{3} \cos(3x) dx = \left[-\frac{2x+1}{3} \cos(3x) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{2}{9} \sin(3x) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}.$$

Donc

$$I_1 = -\frac{\pi+1}{3} \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{-\pi+1}{2} \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{2}{9} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \frac{2}{9} \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 0 + 0 - \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = -\frac{4}{9}.$$

Réponse : $I_1 = -\frac{4}{9}$.

2. $I_2 = \int_0^1 e^{\frac{1}{3}t+2x} dt$

On décompose l'exponentielle :

$$e^{\frac{1}{3}t+2x} = e^{2x} \cdot e^{\frac{t}{3}}.$$

Ainsi,

$$I_2 = e^{2x} \int_0^1 e^{\frac{t}{3}} dt = e^{2x} \left[3e^{\frac{t}{3}} \right]_0^1 = e^{2x} (3e^{\frac{1}{3}} - 3) = 3e^{2x} (e^{\frac{1}{3}} - 1).$$

Réponse : $I_2 = 3e^{2x} (e^{\frac{1}{3}} - 1)$.

3. $I_3 = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{18x^2 - 12x + 4} dx$ (on pourra poser le changement de variable $t = 3x - 1$)

Changement de variable :

• Relation entre dx et dt : $t = 3x - 1 \Rightarrow dt = 3 dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{3}$.

• Calcul des nouvelles bornes :

Quand $x = \frac{1}{3}$, $t = 0$.

Quand $x = \frac{2}{3}$, $t = 1$.

- Comme $t = 3x - 1$ on a $x = \frac{t+1}{3}$ donc le dénominateur devient :

$$18x^2 - 12x + 4 = 18 \frac{(t+1)^2}{9} - 12 \times \frac{t+1}{3} + 4 = 2(t^2 - 2t + 1) - 4(t+1) + 4 = 2t^2 - 4t + 2 - 4t - 4 + 4 = 2t^2 + 2$$

Ainsi, avec le changement de variable, I_3 devient :

$$I_3 = \int_0^1 \frac{1}{2t^2 + 2} \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{6} \int_0^1 \frac{1}{t^2 + 1} dt = \frac{1}{6} [\arctan(t)]_0^1.$$

Donc,

$$I_3 = \frac{1}{6} (\arctan(1) - \arctan(0)) = \frac{\pi}{24}$$

Réponse : $I_3 = \frac{\pi}{24}$.

4. $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(5t) \cos(2t) dt$

Méthode : On linéarise la fonction, par exemple avec l'utilisation de la formule trigonométrique :

$$\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)].$$

Ainsi,

$$I_4 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(7t) + \sin(3t) dt = \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos(7t)}{7} - \frac{\cos(3t)}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}.$$

Donc,

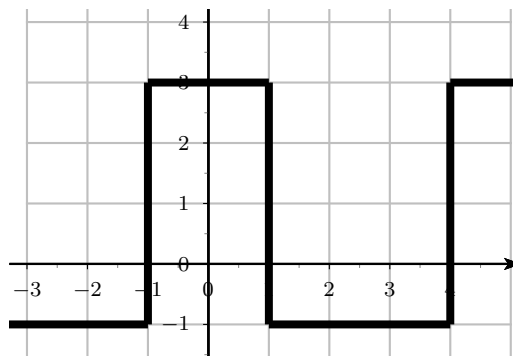
$$I_4 = \frac{1}{2} \left(0 + 0 - \left(-\frac{1}{7} - \frac{1}{3} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{10}{21} \right) = \frac{5}{21}.$$

Réponse : $I_4 = \frac{5}{21}$.

Exercice 2

1. On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction périodique de période T est : $\frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$.

Calculer la valeur moyenne de la fonction périodique, dont le graphe est :



$$\text{Valeur moyenne de } f = \frac{1}{5} \int_0^4 f(t) dt = \frac{1}{5} \times (3 - 3 + 3) = \frac{3}{5}$$

2. Donner une exemple de fonction g telle que $\int_{-1}^3 g(t) dt = 5$.

On peut choisir une fonction constante :

$$g(t) = \frac{5}{4} \quad \text{car} \quad \int_{-1}^3 \frac{5}{4} dt = \frac{5}{4} \times (3 - (-1)) = \frac{5}{4} \times 4 = 5.$$

Exercice 3

1. Poser la division Euclidienne de $P(x) = x^3 + 4x^2 + 1$ par $Q(x) = x(x+2)^2$.

On a $Q(x) = x(x^2 + 4x + 4) = x^3 + 4x^2 + 4x$. La division euclidienne donne :

$$\begin{cases} \text{Quotient : } E(x) = 1, \\ \text{Reste : } R(x) = -4x + 1. \end{cases}$$

Donc

$$P(x) = 1 \cdot Q(x) + (-4x + 1).$$

Réponse :

2. Déterminer la décomposition en éléments simples de $f(x) = \frac{-4x + 1}{x(x+2)^2}$

On cherche A, B, C tels que :

$$\frac{-4x + 1}{x(x+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}.$$

- Pour calculer A , on multiplie l'égalité par x puis on pose $x = 0$. On trouve $A = \frac{1}{4}$.
- Pour calculer C , on multiplie l'égalité par $(x+2)^2$ puis on pose $x = -2$. On trouve $C = -\frac{9}{2}$.
- Pour calculer B , on multiplie l'égalité par x puis on fait tendre x vers $+\infty$. On trouve $0 = A + B$ donc $B = -\frac{1}{4}$.

Réponse :

$$\boxed{\frac{-4x + 1}{x(x+2)^2} = \frac{1/4}{x} - \frac{1/4}{x+2} - \frac{9/2}{(x+2)^2}.$$

3. Calculer l'intégrale $I = \int_1^2 \frac{x^3 + 4x^2 + 1}{x(x+2)^2} dx$

D'après la division euclidienne :

$$\frac{x^3 + 4x^2 + 1}{x(x+2)^2} = 1 + \frac{-4x + 1}{x(x+2)^2}.$$

Ainsi,

$$I = \int_1^2 1 dx + \int_1^2 \frac{-4x + 1}{x(x+2)^2} dx = [x]_1^2 + \int_1^2 \left(\frac{1/4}{x} - \frac{1/4}{x+2} - \frac{9/2}{(x+2)^2} \right) dx.$$

Calculons chaque terme :

$$[x]_1^2 = 2 - 1 = 1,$$

$$\int_1^2 \frac{1/4}{x} dx = \frac{1}{4} [\ln |x|]_1^2 = \frac{\ln(2)}{4},$$

$$\int_1^2 -\frac{1/4}{x+2} dx = -\frac{1}{4} [\ln |x+2|]_1^2 = -\frac{1}{4} (\ln(4) - \ln(3)),$$

$$\int_1^2 -\frac{9/2}{(x+2)^2} dx = -\frac{9}{2} \left[-\frac{1}{x+2} \right]_1^2 = \frac{9}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) = \frac{9}{2} \left(-\frac{1}{12} \right) = -\frac{3}{8}.$$

En combinant tout :

$$I = 1 + \frac{\ln(2)}{4} - \frac{\ln(4) - \ln(3)}{4} - \frac{3}{8} = \frac{5}{8} + \frac{\ln(2) - 2\ln(2) + \ln(3)}{4} = \frac{5}{8} + \frac{\ln(3) - \ln(2)}{4}.$$

Réponse :

$$I = \frac{5}{8} + \frac{\ln(3) - \ln(2)}{4}.$$

Exercice 4

1. Dire si les équivalences suivantes sont vraies ou fausses

$$(a) \frac{t^4 + t}{(t^4 - 1)(2t + 5)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$$

Faux : la limite du quotient ne vaut pas 1

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^4 + t}{(t^4 - 1)(2t + 5)} \times t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^5}{2t^5} = \frac{1}{2}$$

$$(b) \frac{1}{1+t} \underset{0}{\sim} 1-t$$

Vrai : la limite du quotient vaut 1

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1+t)(1-t)} = 1$$

$$(c) e^t - 1 \underset{+\infty}{\sim} t$$

Faux : la limite du quotient ne vaut pas 1

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$$

par croissances comparées.

2. Déterminer si les intégrales généralisées suivantes sont convergentes ou divergentes :

$$(a) K_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t^3}}{t^5} dt = \int_1^{+\infty} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{t^5} dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{7}{2}}} dt$$

D'après le critère de Riemann (avec $\alpha = 3,5$), l'intégrale converge.

$$(b) K_2 = \int_1^{+\infty} t \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$$

On sait que $\sin(X) \underset{0}{\sim} X$ donc $\sin\left(\frac{1}{t^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ donc

$$t \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$$

Or $\int_1^{\infty} \frac{1}{t} dt$ diverge d'après le critère de Riemann.

Donc K_2 diverge par équivalence.

3. Calculer $K_3 = \int_1^{+\infty} \frac{t^2 + 1}{t^3 + 3t + 2} dt$

Il n'est pas nécessaire de calculer K_3 car on peut montrer qu'elle diverge vers $+\infty$:

En effet : la fonction est équivalente en $+\infty$ à $g(t) = \frac{1}{t}$, or l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ diverge d'après le critère de Riemann, donc K_3 diverge vers $+\infty$.

Si on souhaite faire le calcul « à la main » :

$$\begin{aligned} K_3 &= \int_1^{+\infty} \frac{t^2 + 1}{t^3 + 3t + 2} dt \\ &= \frac{1}{3} \int_1^{+\infty} \frac{3t^2 + 3}{t^3 + 3t + 2} dt \\ &= \frac{1}{3} [\ln(t^3 + 3t + 2)]_1^{+\infty} \\ &= \frac{1}{3} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln(t^3 + 3t + 2) - \ln(6) \right) \\ &= +\infty \end{aligned}$$