

Mathématiques

Semestre 2

Travaux Dirigés Mathématiques

Année 2025-2026

Nom :
Prénom :
Groupe :

La confiture n'est bonne que s'il faut monter sur une chaise pour attraper le pot dans le placard.
A Vialatte

Table des matières

1	Fonctions réciproques	2
2	Systèmes linéaires et matrices	6
3	Polynômes	9
4	Calcul intégral - Partie 1	13
5	Calcul intégral - Partie 2	17
6	Transformée de Laplace	20
7	Suites numériques	25
8	DS de l'année 2024-2025	28
9	DS de l'année 2023-2024	32

Chapitre 1

Fonctions réciproques

Exercice 1 *Ensemble image*

On considère la fonction $f(t) = (t - 1)^2 - 2$

1. Déterminer l'image par f de l'intervalle $]2, 3[$.
2. Déterminer l'image par f de l'intervalle $] - 2, 0]$.
3. Déterminer l'image par f de l'intervalle $] - 1, 3]$.
4. Déterminer l'image par f de l'intervalle $] - \infty, 2]$.

Exercice 2 *Fonctions bijectives*

1. La fonction $t \mapsto t - 1 + e^{-t}$ est-elle bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? De $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$?
2. La fonction $t \mapsto \frac{2t+1}{t-4}$ est-elle bijective de $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ dans $\mathbb{R}$?
3. Déterminer deux ensembles D et E tels que la fonction $t \mapsto \frac{t}{1+t^2}$ soit bijective de D dans E .

Exercice 3

1. Donner un exemple de fonction qui soit bijective de $[0; 1]$ dans $[-2; 3]$.
2. Donner un exemple de fonction qui soit bijective de $[1; +\infty[$ dans $[-2; +\infty[$.
3. Donner un exemple de fonction qui soit bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $[0, 2]$.

Exercice 4 *Théorème de la bijection*

Démontrer que l'équation $x^3 + 3x - 5 = 0$ admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}$. Donner une méthode pour trouver une valeur approchée à 10^{-2} de cette solution.

Exercice 5 *Fonctions réciproques*

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. On considère la fonction $f(x) = \frac{x}{1+x}$.
 - (a) Montrer que f est une bijection de $] - 1, +\infty[$ dans un ensemble que l'on déterminera.
 - (b) Déterminer la fonction réciproque de la fonction f .
2. Vérifier que les fonctions $g(x) = \frac{x+3}{x-2}$ et $h(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ sont réciproques l'une de l'autre.

Exercice 6

1. Montrer que la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0; 1[$.

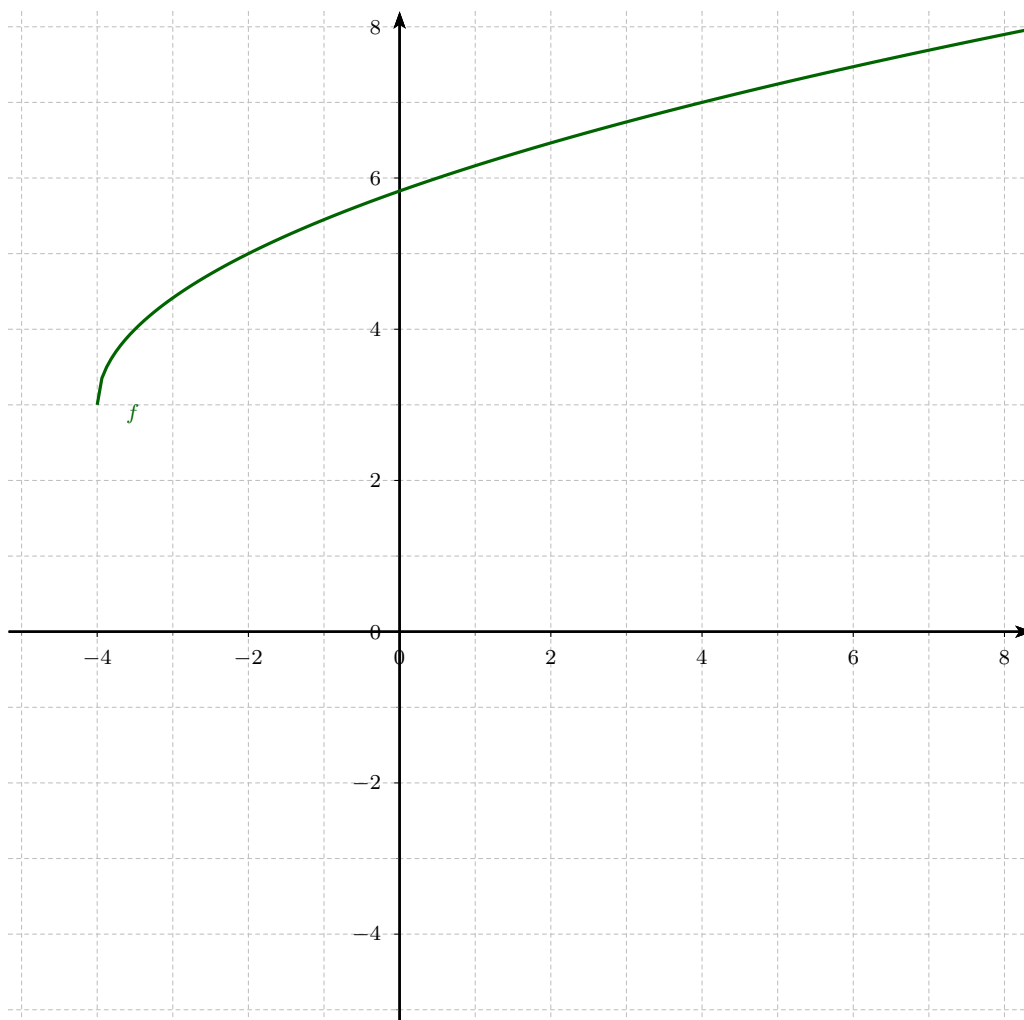
2. Déterminer sa fonction réciproque.
3. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique.

Exercice 7

On considère la fonction :

$$\begin{array}{ll} f : [-4, +\infty[& \longrightarrow E \\ x & \longmapsto \sqrt{2x+8} + 3 \end{array}$$

1. Montrer que f est une bijection de $[-4, +\infty[$ dans un ensemble E que l'on déterminera.
2. Déterminer la fonction réciproque de f .
3. Sur le graphique ci-dessous nous avons tracé la courbe représentative de f . Tracer la courbe de la réciproque de f .



Exercice 8 *arccos, arcsin, arctan*

Calculer :

- | | | |
|--------------------------------------|---|--|
| 1. $\arccos(-0.5)$ | 6. $\arccos\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$ | 9. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ |
| 2. $\arcsin(-1)$ | | |
| 3. $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$ | 7. $\arccos\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$ | 10. $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)\right)$ |
| 4. $\arctan(-1)$ | | |
| 5. $\arctan(\sqrt{3})$ | 8. $\arccos\left(\cos\left(\frac{31\pi}{4}\right)\right)$ | 11. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{17\pi}{6}\right)\right)$ |

Exercice 9

Calculer :

- | | | |
|--|---|--|
| 1. $\arccos\left(\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$ | 4. $\arcsin\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)$ | 7. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \arctan(t)$ |
| 2. $\arcsin\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)$ | 5. $\arctan\left(\tan\left(\frac{29\pi}{3}\right)\right)$ | 8. $\lim_{t \rightarrow -\infty} \arctan(t)$ |
| 3. $\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ | 6. $\arctan\left(\tan\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$ | 9. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \arccos(t)$ |

Exercice 10

1. Soit
- $x \in [-1, 1]$
- , simplifier les expressions :

(a) $\sin(\arcsin(x))$, (b) $\cos(\arccos(x))$, (c) $\cos(\arcsin(x))$, (d) $\sin(\arccos(x))$.

2. Montrer que,
- $\forall x \in [-1, 1]$
- ,

$$\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Compléments

Exercice 11 Soit $f(x) = \arccos(\cos(x))$.

- Déterminer l'ensemble de définition de f .
- Déterminer la période de f .
- Déterminer la parité de f .
- Tracer la courbe représentative de f

Exercice 12

On considère la fonction

$$f :]2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x+1}{x-2}$$

- Montrer que f est une bijection de E_1 sur F_1 , avec E_1 et F_1 deux ensembles à déterminer.
- Soit

$$f^{-1} : E_2 \rightarrow F_2$$

- Expliquer pourquoi f admet une application réciproque f^{-1} .
 - Déterminer les ensembles de départ E_2 et d'arrivée et F_2 de f^{-1} .
 - Déterminer l'application réciproque de f .
- Déterminer g tel que $g \circ f(x) = \ln(x)$

Exercice 13

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{aligned} f :] \tfrac{2}{5}; +\infty[&\longrightarrow E \\ x &\longmapsto \ln \left(\frac{1}{5x-2} \right). \end{aligned}$$

1. Dresser le tableau de variation de f sur $] \tfrac{2}{5}; +\infty[$.
2. Déterminer l'ensemble E pour que f soit bijective de $] \tfrac{2}{5}; +\infty[$ dans E .
3. Déterminer f^{-1} , la fonction réciproque de f .
4. Déterminer l'ensemble F pour que f^{-1} soit bijective de $\mathbb{R}$ dans F .

Exercice 14

1. Donner un exemple de fonction bijective de $[2, +\infty[$ dans $] -\infty, 3]$.
2. Donner un exemple de fonction non bijective définie sur $\mathbb{R}$.
3. Donner un exemple de fonction bijective telle que $f(x) = f^{-1}(x)$.

Chapitre 2

Systèmes linéaires et matrices

Exercice 1 *Méthode de Gauss*

Résoudre par la méthode de Gauss :

$$a) \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y = -1 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 2x + 5y = -9 \\ x + 7y = -15 \end{cases} \quad c) \begin{cases} 2x + y = 3 \\ -4x - 2y = 5 \end{cases} \quad d) \begin{cases} 4x + 2y = -6 \\ 2x + y = -3 \end{cases}$$

Exercice 2

Résoudre par la méthode de Gauss :

$$a) \begin{cases} 2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 5 \\ 3\sqrt{x} + 5\sqrt{y} = 7 \end{cases} \quad b) \begin{cases} \frac{3}{y-1} - \frac{1}{x+2} = \frac{3}{4} \\ \frac{5}{y-1} + \frac{3}{x+2} = \frac{29}{12} \end{cases} \quad c) \begin{cases} \ln(x^3y) = 2 \\ \ln\left(\frac{x}{y^2}\right) = 3 \end{cases}$$

Exercice 3

Résoudre par la méthode de Gauss :

$$a) \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x - 2y + 2z = 11 \\ -x + 6y - 5z = -28 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 2x + 7y - 3z = 8 \\ -3x + y + z = -4 \\ x - 8y + 2z = 4 \end{cases} \quad c) \begin{cases} 2x - y + 3z = 3 \\ x + 3y - z = 5 \\ -x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \quad d) \begin{cases} x + 2y + z + t = 1 \\ 2x + 3y + 3z + 3t = 5 \\ -2x - y + 2t = -1 \\ -x - 3z + t = -7 \end{cases}$$

Exercice 4 *Écriture matricielle d'un système*

On considère le système suivant

$$(S) \quad \begin{cases} x & - & y & + & z & = & 1 \\ -4x & + & 3y & - & z & = & 2 \\ 2x & - & y & + & z & = & 2 \end{cases}$$

1. Écrire le système (S) sous la forme $AX = B$, avec $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$, $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. Déterminer a , b et c pour que la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & a \\ b & \frac{1}{2} & c \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ soit la matrice inverse de A .
3. Résoudre le système (S) matriciellement, en utilisant la matrice M .

Exercice 5 *Extrait de DS 2017*

$$(S) \begin{cases} \sqrt{3}x & -\sqrt{3}y & & = 6 \\ x & +y & -2z & = 0 \\ \sqrt{2}x & +\sqrt{2}y & +\sqrt{2}z & = 12 \end{cases}$$

1. Ecrire le système (S) sous la forme $AX = B$ avec $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$, $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. (a) Donner l'expression de tA , la transposée de A .
(b) Calculer tAA puis en déduire que $A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.
3. Résoudre le système (S) par la méthode de votre choix.

Exercice 6 *Déterminants*

Calculer le déterminant puis dire si les matrices suivantes sont inversibles :

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

4. $D = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

6. $F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & -4 \\ -3 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & -6 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

2. $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$

5. $E = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -2 & -1 & 4 \\ 6 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

7. $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 7 *Résolution de système avec la matrice inverse*

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la valeur de a pour que la matrice ne soit pas inversible.
2. On pose $a = -4$. Déterminer A^{-1} .
3. Résoudre le système :

$$\begin{cases} -4x + 2y + 3z = 8 \\ -x + 2y - z = 4 \\ -3x + 2y + z = -4 \end{cases}$$

Exercice 8 *Matrice inverse*

Déterminer les matrices inverses des matrices suivantes

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

3. $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

5. $D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & -10 \\ -5 & 8 & 17 \end{pmatrix}$

2. $A_2 = \begin{pmatrix} 21 & -3 \\ 12 & 7 \end{pmatrix}$

4. $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -4 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Exercice 9

Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère le système d'inconnues x et y :

$$\begin{cases} ax + y = 2 \\ x + ay = 1 \end{cases}$$

1. Donner toutes les valeurs de a pour lesquelles ce système admet une solution unique.
2. Résoudre alors ce système en fonction de a .

Compléments

Exercice 10

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \\ -4 & 3 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les déterminants de A , B et C
2. Le système suivant admet t-il une unique solution ? (on ne demande pas de le résoudre)

$$(S) \quad \begin{cases} 17x - 2y = 1 \\ 3x + 8y = 2 \end{cases}$$

3. La matrice B est-elle inversible ? Si oui, déterminer B^{-1} .

Exercice 11 Les questions suivantes sont indépendantes :

1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$ et la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ sont-elles l'inverse l'une de l'autre ?
2. Soit la matrice $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Existe-t-il une matrice D telle que $C \times D$ et $C + D$ existent ?
3. Soit la matrice $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

(a) Déterminer a , b et c pour que $F = \begin{pmatrix} a & -2 & 5 \\ -3 & b & 2 \\ 4 & c & -2 \end{pmatrix}$ soit l'inverse de E .

(b) En déduire les solutions du système :
$$\begin{cases} y + z = 1 \\ 2x + 5z = 1 \\ x + 2y + 4z = 6 \end{cases}$$

Chapitre 3

Polynômes

Exercice 1 *Degré de polynômes*

Déterminer le degré des polynômes suivants :

1. $P_1(X) = (X - 1)^2(X + 1)$
2. $P_2(X) = (X - 1)^2(X^2 + 1)^2$
3. $P_3(X) = X(X^3 + 1)^2(X^2 + 2X + 1)$
4. $P_4(X) = X^2(X^2 + 2) + X^4 + 2X + 1$
5. $P_5(X) = X(X^3 + 1)^2 - X^7 + 2X + 1$
6. $P_6(X) = P_1(P_2(X))$
7. $P_7(X) = P_1(X)P_2(X)$
8. $P_8(X) = P_1(X) + P_2(X)$

Exercice 2 *Factorisation dans $\mathbb{R}$*

Factoriser dans $\mathbb{R}$ les polynômes suivants :

1. $P_1(X) = X^2 - 2X - 3$
2. $P_2(X) = X^3 - 7X^2 + 12X$
3. $P_3(X) = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$
4. $P_4(X) = X^3 + 2X^2 - 4X - 5$
5. $P_5(X) = X^4 - 64$
6. $P_6(X) = X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 4$
7. $P_7(X) = (X - i)(X + i)(X - 1 + i)(X - 1 - i)$

Exercice 3 *Factorisation dans $\mathbb{C}$*

Soit $P(X) = X^3 + 2X^2 - 3X + 20$.

1. Montrer que $1 + 2i$ est racine de P .
2. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 4 *Factorisation dans $\mathbb{C}$*

Soit $P(X) = X^3 - (4 - 3i)X^2 - 6iX + (7 - 9i)$.

1. Montrer que P admet une racine réelle r si et seulement si r est solution de $r^3 - 4r^2 + 7 = 0$ et de $3r^2 - 6r - 9 = 0$.
2. P admet-il une racine réelle ?

Exercice 5 *Factorisation dans $\mathbb{C}$*

Soit $P(X) = X^4 + 2X^3 + 5X^2 + 8X + 4$.

1. Trouver une racine de P de la forme bi .
2. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 6 Factorisation dans $\mathbb{C}$

Posons $P(X) = X^3 + (-3 - 4i)X^2 + (-3 + 8i)X + 5$.

1. Vérifier que i est racine de P . En déduire un polynôme P_1 tel que $P(X) = (X - i)P_1(X)$.
2. Trouver les racines complexes z_1 et z_2 de P_1 et en déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$.
3. Soit Q un polynôme de degré 4 à coefficients réels qui admet z_1 et z_2 comme racines. Écrire la factorisation de Q dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 7 Racines multiples

1. Montrer que le polynôme $P(X) = X^3 + X^2 - 16X + 20$ admet le nombre 2 comme racine de multiplicité 2. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $P(X) = X^4 - 5X^3 + 9X^2 - 7X + 2$. On remarque que $P(1) = 0$: déterminer la multiplicité de 1. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer a pour que le polynôme $P(X) = 2X^2 - X + a - 2$ admettent une racine de multiplicité 2. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 8

1. Donner un polynôme P_1 à coefficients réels qui admet $1 + i$ et 2 comme racines.
2. Donner un polynôme P_2 de degré 4 qui admet 2 comme racine double et -1 comme racine simple.
3. Donner un polynôme P_3 vérifiant ces 4 conditions suivantes :
 - -2 est racine simple de P_3
 - $1+i$ est racine de multiplicité 2 de P_3
 - le reste de la division euclidienne de P_3 par $X^2 + 1$ est nul
 - P_3 est à coefficient réels

Exercice 9 Factorisation dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

On considère le polynôme $P(X) = X^3 + X^2 - 4X + 6$.

1. Montrer que $1 + i$ est une racine de P .
2. Le polynôme P admet-il une autre racine complexe ? Si oui, que vaut-elle ?
3. Effectuer la division euclidienne de P par $X + 3$
4. (a) Les racines de P dans $\mathbb{C}$, dans $\mathbb{R}$.
(b) La factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$, dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 10 Divisions Euclidiennes

Effectuer la division euclidienne de :

1. $P(X) = X^4 - X^3 + 2X^2 + X - 1$ par $D(X) = X^2 + X - 1$.
2. $P(X) = X^5 + X + 1$ par $D(X) = X^3 - X^2 + 1$.
3. $P(X) = X^3 + 3X - 2i$ par $D(X) = X - i$.

Exercice 11 Racines multiples - Division Euclidienne

Soit le polynôme $P(X) = X^6 - 5X^4 + 8X^3 - 9X^2 + aX + b$, où a et b sont deux réels.

1. Déterminer a et b pour que 1 soit racine de multiplicité $k \geq 2$ du polynôme P . Désormais, a et b auront ces valeurs.
2. Quel est alors l'ordre de multiplicité k de 1 comme racine de P ?
3. Vérifier ce résultat en effectuant la division euclidienne de P par $(X - 1)^k$ pour les valeurs a et b trouvées. Préciser la valeur du quotient Q .
4. Vérifier que i est racine de Q .
5. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 12 *Extrait de DS 2019*

On souhaite étudier la propriété suivante :

Le produit de 4 nombres entiers qui se suivent auquel on ajoute 1 est toujours le carré d'un nombre entier (★)

Exemple : $4 \times 5 \times 6 \times 7 + 1 = 841 = 29^2$

1. Soient N un nombre entier et $P(N)$ le résultat du produit de N par les 3 entiers suivants auquel on ajoute 1. Montrer que

$$P(N) = N^4 + 6N^3 + 11N^2 + 6N + 1$$

2. Poser la division euclidienne de P par $N^2 + 3N + 1$.
3. Dire si la propriété (★) est vraie ou fausse puis donner la valeur de $\sqrt{15 \times 16 \times 17 \times 18 + 1}$.

Exercice 13 *Interpolation polynômiale*

1. Soient les matrices A et B :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & \alpha \\ \beta & 4 & -1.5 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer α et β pour que B soit l'inverse de A .

2. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} a + b + c = 3 \\ 4a + 2b + c = 5 \\ 9a + 3b + c = 9 \end{cases}$$

3. Déterminer le polynôme P sachant que : P est de degré 2, $P(1) = 3$, $P(2) = 5$ et $P(3) = 9$.

Exercice 14 *D.E.S.*

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ les fractions rationnelles :

$$1. F_1(X) = \frac{4}{(X-5)(X+3)}$$

$$3. F_3(X) = \frac{X^3}{X^2 + 2X - 15}$$

$$2. F_2(X) = \frac{X^2 + 1}{X(X-2)(X+4)}$$

Exercice 15 *D.E.S.*

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ les fractions rationnelles :

$$1. F_1(X) = \frac{X^2}{(X-1)^2(X+4)}$$

$$3. F_3(X) = \frac{1}{X^2(X+2)^2}$$

$$2. F_2(X) = \frac{X^2 + 1}{X^4 - 2X^3}$$

Exercice 16 *D.E.S.*

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ les fractions rationnelles :

$$1. F_1(X) = \frac{3X + 2}{(X^2 + 1)(X - 2)}$$

$$3. F_3(X) = \frac{X^4}{X^3 - 2X^2 + X - 2}$$

$$2. F_2(X) = \frac{X^3 + X}{(X^2 + X + 1)(X^2 - 6X + 8)}$$

Exercice 17 *Extrait de DS 2018*

1. Donnez la **forme** de la décomposition en élément simples (DES) dans $\mathbb{R}[X]$ des fractions rationnelles suivantes :

$$(a) F_1(X) = \frac{X^3}{(1+X)(X-2)} \quad (b) F_2(X) = \frac{2}{X^3+X} \quad (c) F_3(X) = \frac{2X+1}{X^3(X^2+1)}$$

2. Calculez les constantes dans la DES de F_1 et F_2 .

Compléments

Exercice 18 Soit la fonction $F(X) = \frac{X^4 + 4X^3 + 5X^2 + 3X - 1}{X^3 + 2X^2 + X}$.

- Déterminer les polynômes $E(X)$ et $D(X)$ tels que $F(X) = E(X) + \frac{D(X)}{X^3 + 2X^2 + X}$ avec $\deg(D) < 3$.
- Factoriser le polynôme $Q(X) = X^3 + 2X^2 + X$.
- Donner la forme de la D.E.S. de F .
- Donner la décomposition en éléments simples de F .

Exercice 19 Répondre par Vrai ou Faux en justifiant.

- Il n'existe pas de polynôme de degré 5 à coefficients réels qui admette 3 comme racine triple et i comme racine double.
- Le reste de la division euclidienne de $P(X) = X^6 - 3X^2 - 3$ par $X - 1$ est nul.
- Soit P un polynôme. Si $P'(3) = 0$ alors 3 est racine de P de multiplicité au moins 2.
- Il existe un polynôme P tel que $P(X^3 + 1) = X^3 P(X)$.
- La forme de la D.E.S. de $F(X) = \frac{2X-7}{(X+1)(X^2+3X+1)}$ est $F(X) = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X^2+3X+1}$

Exercice 20 Soit $P(X) = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 2X + 1$.

- Montrez que -1 est racine double de P .
- Effectuez la division euclidienne de P par $X - i$.
- Sans poser la division euclidienne de P par $X + i$, justifiez pourquoi le reste est forcément nul.
- Déterminez la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 21 Considérons un polynôme P défini par

$$P(X) = 2X^5 - 3X^4 - 8X^3 + 5X^2 + \alpha X + \beta$$

- Déterminer les valeurs de α et β pour que 2 et -1 soient racines de P .
Pour les questions suivantes on remplacera α et β par les valeurs obtenues à la question 1.
- Montrer que les racines 2 et -1 sont de multiplicité 2.
- Sachant que $(X-2)^2(X+1)^2 = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 4X + 4$, poser la division euclidienne de P par $(X-2)^2(X+1)^2$.
- En déduire la forme factorisée de P dans $\mathbb{R}[X]$.

Chapitre 4

Calcul intégral - Partie 1

Exercice 1 *Calcul de surface*

1. On considère les 3 fonctions suivantes :

$$f_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in]-\infty; 0[\\ 2 & \text{si } t \in [0, 3[\\ 0 & \text{si } t \in [3, +\infty[\end{cases} \quad f_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in]-\infty; -1[\\ 2 & \text{si } t \in [-1, 2[\\ -2 & \text{si } t \in [2, 3[\\ 0 & \text{si } t \in [3, +\infty[\end{cases} \quad f_3(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in]-\infty; -1[\\ t+1 & \text{si } t \in [-1, 0[\\ -t+1 & \text{si } t \in [0, 1[\\ 0 & \text{si } t \in [1, +\infty[\end{cases}$$

Calculer $I_1 = \int_{-5}^5 f_1(t)dt$, $I_2 = \int_{-5}^5 f_2(t)dt$ et $I_3 = \int_{-5}^5 f_3(t)dt$,

2. Calculer $\int_{-1}^5 |t-3|dt$

Exercice 2 *Propriétés graphiques*

Dire si les égalités sont vraies ou fausses :

1. $\int_{-2\pi}^{\pi} |\sin(t)|dt = 3 \int_0^{\pi} \sin(t)dt$,

2. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^4(3t)dt = 0$

3. $\int_0^{\pi} 2 + \sin(t)dt = 2 + \int_0^{\pi} \sin(t)dt$.

4. $\int_{-\pi\sqrt{3}}^{\pi\sqrt{3}} 14t^7 + 23t^5 - t^3 - \frac{4t}{7} dt = 0$

5. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t^3 - 3t + 1dt = 1$

Exercice 3 *Calcul de surface*

Tracer les courbes d'équations $y = 2x$, $y = \frac{x}{4}$ et $y = \frac{2}{x^2}$ sur le quadrant $x > 0$, $y > 0$. Calculer l'aire de la surface centrale délimitée par ces 3 courbes.

Exercice 4 *Calculs de primitives*

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{-1}^2 \frac{2t^3 + 5t^2 -}{4t + 1} dt$

4. $\int_1^2 \frac{1}{t^3} dt$

7. $\int_0^1 e^{\frac{1}{3}t} dt$

11. $\int_1^2 \frac{3t^2 + 2t + 1}{t^3 + t^2 + t + 2} dt$

2. $\int_{-2}^2 t^5 + 3t^2 + 4t dt$

5. $\int_1^2 \frac{t}{\sqrt{t^2 + 3}} dt$

8. $\int_0^5 e^{-\frac{t}{5}} dt$

12. $\int_0^{\pi} \sin(5t) dt$

3. $\int_1^2 t(t^2 + 1)^2 dt$

6. $\int_{-1}^1 e^{7t} dt$

9. $\int_0^1 \frac{e^{4t} - e^{-4t}}{2} dt$

13. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(3t) dt$

10. $\int_1^2 \frac{3}{5t-1} dt$

Exercice 5 *Calculs de primitives*

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{\sqrt{\pi}} t \cos(t^2) dt$

2. $\int_0^1 t^2 e^{t^3} dt$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(t)}{\cos^3(t)} dt$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(3t) \cos^4(3t) dt$

5. $\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{e^{\cos t}} dt$

6. $\int_0^1 2^t dt$

7. $\int_0^1 \frac{\frac{1}{2}}{4t^2 + 1} dt$

8. $\int_{-3}^2 |t^2 - 4| dt$

9. $\int_0^{2\pi} \frac{\sin(x) \ln(t)}{e^{7 \cos t}} dx$

Exercice 6 *Attention à la variable !*

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \int_1^e \frac{t}{x} dx$

2. $I_2 = \int_1^e \frac{t}{x} dt$

3. $I_3 = \int_0^1 e^{\frac{t}{x}} dt$

4. $I_4 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2t) dx$

5. $I_5 = \int_0^{\pi} \sin(2t) + x dt$

Exercice 7 *D.E.S*

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \int_0^1 \frac{t^2}{t+1} dt$

3. $K = \int_4^5 \frac{t^3 + 2}{t^2 - 5t + 6} dt$

5. $M = \int_0^1 \frac{3t+1}{(t+2)(t^2+1)} dt$

2. $J = \int_0^1 \frac{3t^2 + 2t - 4}{(t+1)(t^2-4)} dt$

4. $L = \int_0^1 \frac{3t+1}{(t+1)^2} dt$

Exercice 8 *D.E.S*On souhaite calculer $I = \int_0^2 \frac{t^2 + 1}{(t+1)(t^2+4)} dt$

1. Déterminer une primitive de $f(t) = \frac{1}{t^2+4}$.

2. Déterminer une primitive de $g(t) = \frac{t-1}{t^2+4}$.

3. Montrer que

$$\frac{t^2+1}{(t+1)(t^2+4)} = \frac{3(t-1)}{5(t^2+4)} + \frac{2}{5(t+1)}.$$

4. Calculer I .**Exercice 9** *Linéarisation*

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t) \cos(3t) dt$

2. $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t) dt$

3. $K = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(2t) \cos(5t) dt$

Exercice 10 I.P.P.

A l'aide d'une (ou plusieurs) intégration(s) par parties, calculer :

1. $I = \int_0^1 (1+t)e^{2t} dt$

4. $L = \int_1^e \ln(t) dt$

2. $J = \int_0^\pi t^2 \cos\left(\frac{t}{2}\right) dt$

5. $M = \int_0^1 2t \arctan(t) dt$

3. $K = \int_0^1 (1+4t) \ln(2t+1) dt$

6. $N = \int_0^\pi e^t \sin(t) dt$

Exercice 11 I.P.P.

1. Calculer une primitive de $f(t) = \frac{2t}{(t^2-1)^2}$.

2. Calculer $I = \int_2^3 \frac{1}{t(t^2-1)} dt$.

3. Calculer $J = \int_2^3 \frac{2t \ln t}{(t^2-1)^2} dt$.

Exercice 12 Changement de variable

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_0 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4t^2+4t+5} dt$ en posant $x = t + \frac{1}{2}$

2. $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) \sin^3(t) dt$ en posant $u = \cos(t)$

3. $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5(t) \sin^2(t) dt$

4. $I_3 = \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$ en posant $t = \cos(x)$

5. $I_4 = \int_0^1 \frac{1}{1+e^u} du$ en posant $t = e^u$

Exercice 13 Changement de variable

On souhaite calculer $I = \int_1^2 \frac{1}{t} \sqrt{\frac{t-1}{t+1}} dt$

1. On pose $u = \sqrt{\frac{t-1}{t+1}}$. Exprimer t en fonction de u .

2. En déduire une relation entre dt et du .

3. Donner l'expression de l'intégrale I en fonction de la variable u .

4. Calculer I .

Compléments

Exercice 14

On pose $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{1+2\sin(t)} dt$ et $J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2t)}{1+2\sin(t)} dt$.

1. Calculer I .

2. Calculer $I+J$.

3. En déduire J .

Exercice 15 Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$

2. $J = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^4(x) \cos(x) dx$

3. $L = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(x) dx$

4. $M = \int_0^2 |t^2 - 3t + 2| dt$

5. $N = \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx$

6. $P = \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx$
(on pourra effectuer le changement de variable $x = \sin(u)$)

Exercice 16 Soit $f(x) = \frac{x-1}{(x+1)(x^2+2x+2)}$

1. Faire la D.E.S. de $f(x)$
2. Montrer qu'une primitive de $\frac{1}{x^2+2x+2}$ est $\arctan(x+1)$.
3. En déduire une primitive $F(x)$ de $f(x)$.

Exercice 17

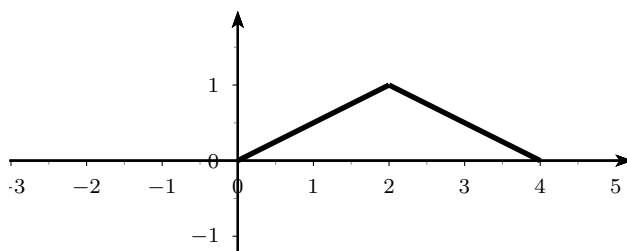
1. Montrer que $\frac{x^3}{1+x^2} = x - \frac{x}{1+x^2}$ puis déterminer une primitive de $\frac{x^3}{1+x^2}$
2. En effectuant une intégration par parties, calculer $\int_{-1}^1 x^2 \arctan(x) dx$
3. Aurait-on pu prévoir le résultat précédent ?

Exercice 18

1. Montrer que $2t^2 + 17t + 36 = (2t+9)(t+4)$.
2. Montrer que $\int_1^8 \frac{t}{2t^2+17t+36} dt = -4 \ln(12) - \frac{9}{2} \ln(11) + 13 \ln(5)$
3. Calculer $I = \int_1^2 \frac{x^5}{2x^6+17x^3+36} dx$ en posant le changement de variable $t = x^3$.

Exercice 19

Soit la fonction $s(t)$ définie sur $[0; 4]$ par :



1. Déterminer $\int_0^4 s(t) dt$
2. On note s_2 la fonction impaire définie sur $[-4; 4]$ telle que $s_2(t) = s(t)$ sur $[0; 4]$.
Déterminer $\int_{-4}^4 s_2(t) dt$
3. On note s_3 la fonction paire définie sur $[-4; 4]$ telle que $s_3(t) = s(t)$ sur $[0; 4]$.
Déterminer $\int_{-4}^4 s_3(t) dt$

Chapitre 5

Calcul intégral - Partie 2

Exercice 1 *Intégrales généralisées*

1. (a) Soit $X > 1$. Calculer $\int_0^X \frac{1}{(2t+1)^2+1} dt$
(b) En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(2t+1)^2+1} dt$ est convergente.
2. (a) Soit $X > 2$. Calculer $\int_2^X \frac{1}{(t+3)(t-1)} dt$
(b) En déduire que $\int_2^{+\infty} \frac{1}{(t+3)(t-1)} dt$ est convergente.
3. (a) Soit $X > 2$. Calculer $\int_2^X \frac{3t^2-2t+2}{(t^2+2)(t-1)} dt$
(b) En déduire que $\int_2^{+\infty} \frac{3t^2-2t+2}{(t^2+2)(t-1)} dt$ est divergente.

Exercice 2 *Équivalence*

Dans chacun des cas suivants, dire si l'équivalent est vrai ou faux en justifiant vos réponses.

- | | |
|---|--|
| 1. $\sin(t) \underset{+\infty}{\sim} t$ | 4. $e^t - 1 \underset{0}{\sim} t$ |
| 2. $\cos(t) - 1 \underset{0}{\sim} t$ | 5. $t^3 + 3t \underset{+\infty}{\sim} t^2 - 5t$ |
| 3. $t^2 + t - 2 \underset{0}{\sim} t - 1$ | 6. $2 \cos(t) - 1 \underset{\pi/3}{\sim} 3t - \pi$ |

Exercice 3 *Équivalence*

Compléter les équivalences avec une fonction « simple » :

- | | |
|--|---|
| 1. $\frac{t^2+t-2}{t^5-3t+1} \underset{+\infty}{\sim}$ | 3. $\ln\left(1+\frac{1}{t}\right) \underset{+\infty}{\sim}$ |
| 2. $\sin\left(\frac{1}{t^2}\right) \underset{+\infty}{\sim}$ | 4. $\frac{t^3+t}{t^5-3t^2} \underset{0}{\sim}$ |

Exercice 4 *Critères de convergence*

Pour chacune des intégrales suivantes dire si elle est convergente ou divergente :

- | | | |
|--|--------------------------------------|--|
| 1. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ | 2. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ | 3. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t}} dt$ |
|--|--------------------------------------|--|

$$\begin{array}{lll}
4. \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{t^3+t} dt, & 6. \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt, & 8. \int_1^{+\infty} t \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt. \\
5. \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt & 7. \int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt, &
\end{array}$$

Exercice 5 *Un peu de logique*

Les affirmations suivantes sont fausses. Trouver dans chacun des cas un contre-exemple le prouvant.

- $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0 \Rightarrow \int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge.
- Soit f et g deux fonctions telles que $0 \leq f(t) \leq g(t)$ pour tout $t \geq 1$. Alors :

$$\int_1^{+\infty} g(t) dt \text{ diverge} \Rightarrow \int_1^{+\infty} f(t) dt \text{ diverge.}$$

Exercice 6 *Calcul d'intégrales généralisées*

Pour chaque intégrale, étudier la nature et calculer sa limite si elle converge.

- $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(t^2+1)} dt.$
- $I = \int_0^{+\infty} \frac{t dt}{1+t^4}.$
- $I = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^2} dt.$

Compléments

Exercice 7 *Comparaison*

- (a) Montrer que $\forall t \in [1, \infty[, 0 \leq \ln t \leq t$.
 (b) Etudier la convergence de $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^3} dt.$
- (a) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, e^t > t$.
 (b) Etudier la convergence de $J = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t} dt.$
- Etudier la convergence de $K = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t+1} dt,$

Exercice 8

- Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$(a) I = \int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2+t+1}\right) dt \qquad (b) J = \int_1^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{t}+1\right)^2}{t+2} dt$$

- On souhaite étudier la nature de l'intégrale : $K = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t^2+1)}{t^3} dt$

- Montrer que, pour tout $t \geq 1$ on a : $0 \leq \ln(t^2+1) \leq t$
- En déduire la nature de K .

Exercice 9 Les questions suivantes sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.

1. (a) Soit $X > 1$. Calculez $\int_1^X e^{-t} dt$.
(b) En déduire la nature* de $\int_1^{+\infty} e^{-t} |\cos(t)| dt$.
2. (a) Soit $X > e$. Calculez $\int_e^X \frac{1}{t \ln^2(t)} dt$ en posant le changement de variable $u = \ln(t)$.
(b) En déduire la nature* de $\int_e^{+\infty} \frac{1}{t \ln^2(t)} dt$.
3. Déterminer la nature* des intégrales suivantes :
(a) $\int_1^{+\infty} \frac{t+1}{(t+3)(t+1)} dt$, (b) $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t}} dt$, (c) $\int_1^{+\infty} \sqrt{t} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$.
4. (a) Soit $X > 1$. Montrez que :

$$\int_1^X \frac{\ln(t)}{t^2} dt = \left[-\frac{\ln(t)}{t} \right]_1^X + \int_1^X \frac{1}{t^2} dt.$$

- (b) En déduire la nature* de $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} dt$.

Exercice 10 Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Donner la nature de l'intégrale I (convergente ou divergente) :

$$I = \int_2^{+\infty} \frac{t^3 - 7t + 3}{t(t+1)(t^2-3)} dt$$

2. On souhaite étudier la nature de l'intégrale : $J = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^3} dt$.
(a) En étudiant les variations de la fonction $g(t) = \arctan(t)$,
montrer que $\forall t \geq 1$, on a $0 \leq \arctan(t) \leq \frac{\pi}{2}$.
(b) En déduire la nature de J .

Chapitre 6

Transformée de Laplace

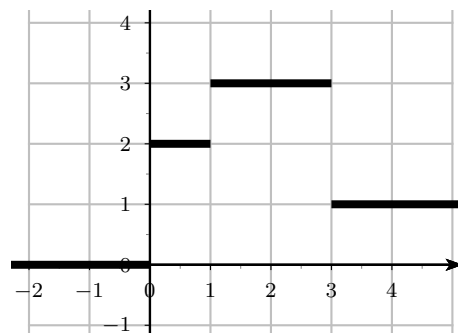
Exercice 1 *Fonction échelon*

On rappelle que la fonction *Echelon de Heaviside* est définie par : $\mathcal{U}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$

1. Représenter la fonction *échelon retardé* : $t \mapsto \mathcal{U}(t-2)$ et la fonction *échelon avancé* : $t \mapsto \mathcal{U}(t+3)$.
2. Représenter les fonctions
 - (a) $f(t) = \mathcal{U}(t) - 2\mathcal{U}(t-1) + \mathcal{U}(t-2)$.
 - (b) $g(t) = \mathcal{U}(t-1) + \mathcal{U}(t-4)$.

Exercice 2 *Exprimer une fonction en utilisant la fonction échelon*

Voici la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:



1. Exprimer $f(t)$ en fonction de t en utilisant la fonction échelon unité.

Exercice 3 *Fonction échelon*

Écrire chaque fonction sans utiliser la fonction $\mathcal{U}$; puis dessiner leur courbe représentative.

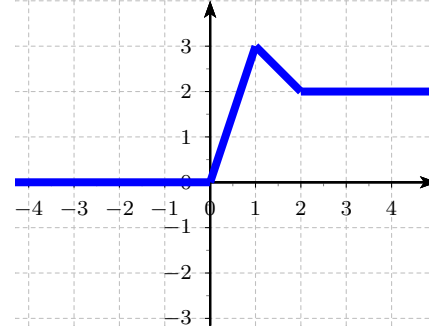
1. $f_1(t) = 3\mathcal{U}(t) + \mathcal{U}(t-1) + 3\mathcal{U}(t-2)$
2. $f_2(t) = 2\mathcal{U}(t-1) - t\mathcal{U}(t-2) + (t-2)\mathcal{U}(t-4)$
3. $f_3(t) = \sin(t)\mathcal{U}(t) - \sin(t)\mathcal{U}(t-\pi)$
4. $f_4(t) = \cos(2t)\mathcal{U}(t - \frac{\pi}{2}) - \cos(2t)\mathcal{U}(t - \pi)$
5. $f_5(t) = (t-1)\mathcal{U}(t-1) + 2\mathcal{U}(t-2) - (2t-1)\mathcal{U}(t-3)$
6. $f_6(t) = t - t\mathcal{U}(t)$

Exercice 4 *Exprimer une fonction en utilisant la fonction échelon*

Définir chacune des fonctions suivantes par une seule égalité (et donc en utilisant la fonction $\mathcal{U}(t)$) :

$$1. f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in]-\infty; 0[\\ t & \text{si } t \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } t \in [1, 2[\\ -t + 4 & \text{si } t \in [2, 4[\\ 0 & \text{si } t \in [4, +\infty[\end{cases}$$

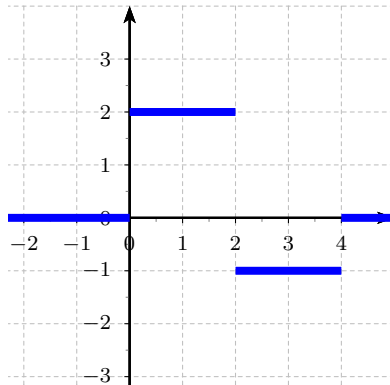
2. g est définie par



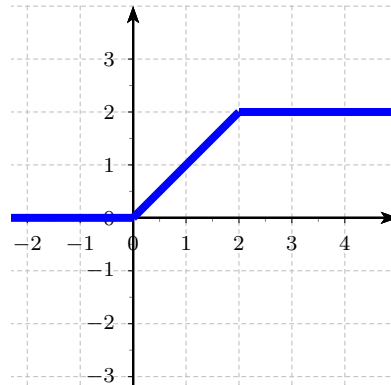
Exercice 5 *Calcul de transformées de Laplace*

En revenant à la définition, calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes :

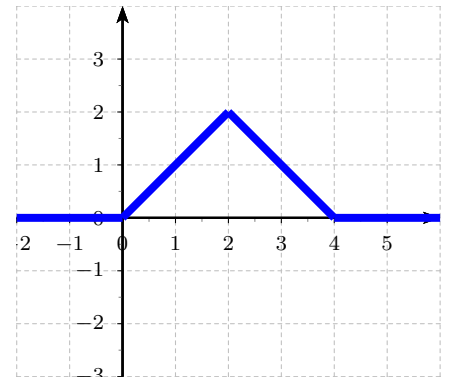
1.



2.



3.



Exercice 6 *Calcul de transformées de Laplace*

Calculer les transformées de Laplace de chacune des fonctions suivantes :

1. $f_1(t) = (3t^2 - 2t + 1)\mathcal{U}(t)$

2. $f_2(t) = (4t^4 + 3t^3 + 5t^2 + 2)\mathcal{U}(t)$

3. $f_3(t) = e^{-3t}\mathcal{U}(t)$

4. $f_4(t) = e^{-5t+2}\mathcal{U}(t)$

5. $f_5(t) = (e^{-3t} - e^{3t})\mathcal{U}(t)$

6. $f_6(t) = \sin(3t)\mathcal{U}(t)$

7. $f_7(t) = (\sin(3t) - 2\cos(3t))\mathcal{U}(t)$

8. $f_8(t) = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}\mathcal{U}(t)$

9. $f_9(t) = \cos(50\pi t + \frac{\pi}{6})\mathcal{U}(t)$

Exercice 7 *Calcul de transformées de Laplace - Retard*

Calculer les transformées de Laplace de chacune des fonctions suivantes :

1. $f_1(t) = t\mathcal{U}(t - 7)$

2. $f_2(t) = t^2\mathcal{U}(t - 2)$

3. $f_3(t) = e^{-t}\mathcal{U}(t - 3)$

4. $f_4(t) = (t^2 + 2t)\mathcal{U}(t - 4)$

5. $f_5(t) = \cos(t)\mathcal{U}(t - \pi)$

6. $f_6(t) = \cos(2t)\mathcal{U}\left(t - \frac{\pi}{3}\right)$

7. f_7 est définie par la courbe 2 de l'exercice 5.

Exercice 8 Calcul de transformées de Laplace

Calculer la transformée de Laplace des fonctions suivantes :

1. $f_1(t) = (2t^2 - 3t)e^{-4t}\mathcal{U}(t)$
2. $f_2(t) = e^{-t}\sin(3t)\mathcal{U}(t)$
3. $f_3(t) = e^{3t}\cos(2t)\mathcal{U}(t)$
4. $f_4(t) = e^{-t}(t+1)\mathcal{U}(t-2)$

Exercice 9

Déterminer les transformées de Laplace des fonctions causales définies par :

1.
$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < 4 \\ 0 & \text{si } t \geq 4 \end{cases}$$
2.
$$g(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < 5 \\ 5 & \text{si } t \geq 5 \end{cases}$$

Exercice 10 Transformées de Laplace inverse

Calculer les transformées de Laplace inverses des fonctions suivantes :

1. $F_1(p) = \frac{2}{p+1}$
2. $F_2(p) = \frac{1}{p^2-1}$
3. $F_3(p) = \frac{p^2+5p+2}{p^3}$
4. $F_4(p) = \frac{p^4+2p^2+2p+1}{p^5}$
5. $F_5(p) = 7\frac{e^{-p}}{p}$
6. $F_6(p) = -4\frac{e^{-2p}}{p+3}$
7. $F_7(p) = 3\frac{1}{(p-2)^2}$
8. $F_8(p) = 2\frac{p+1}{p^2+2p+2}$

Exercice 11

Calculer les transformées de Laplace inverses des fonctions suivantes :

1. $F_1(p) = \frac{3p+4}{p^2+3p-4}$
2. $F_2(p) = \frac{1}{p^2(p+1)}$
3. $F_3(p) = \frac{(p-\omega)^2}{p(p^2+\omega^2)}$
4. $F_4(p) = \frac{e^{-2p}}{p-1}$
5. $F_5(p) = \frac{e^{-\frac{\pi}{3}p}}{p^2+4}$
6. $F_6(p) = \frac{e^{-p\pi}}{p^2+4p+5}$
7. $F_7(p) = \frac{p^2+3p+3}{(p^2+2p+2)(p+1)}$

Exercice 12 Équation différentielle d'ordre 1

On considère l'équation différentielle d'ordre 1 suivante

$$\begin{cases} y(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ 2y'(t) + y(t) = e^{-2t}\mathcal{U}(t) & \text{pour } t > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (6.1)$$

1. Résoudre cette équation avec la méthode vue au semestre 1 (solutions = solution particulière + solutions de l'équation homogène).
2. **Détermination de la transformée de Laplace de y :**
On note F la transformée de y .
(a) Rappeler la formule de $\mathcal{L}_{f'(t)}(p)$

- (b) Appliquer la transformée de Laplace à l'équation différentielle (6.1) et en déduire l'expression de $F(p)$ en fonction de p .

3. **Détermination de y :**

- (a) Vérifier que $F(p) = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{p+2} + \frac{8}{3} \times \frac{1}{2p+1}$.
- (b) Déduire du résultat précédent l'expression de la solution $y(t)$ pour t positif.

Exercice 13 Équation différentielle d'ordre 2

L'étude d'un mouvement amorti amène à considérer la fonction f telle que :

$$\begin{cases} y(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = e^{-t}\mathcal{U}(t) & \text{pour } t > 0 \\ y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 0. \end{cases} \quad (6.2)$$

On note F la transformée de y .

1. Donner la formule de $\mathcal{L}_{f''(t)}(p)$.
2. Appliquer la transformée de Laplace à l'équation différentielle (6.2) et en déduire l'expression de $F(p)$ en fonction de p .
3. Vérifier que $F(p) = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2 + 1}$.
4. Déduire du résultat précédent l'expression de $y(t)$ pour t positif.

Exercice 14 Systèmes d'équations différentielles

Résoudre les systèmes d'équations différentielles :

1.
$$\begin{cases} y'(t) + x(t) = \sin(t)\mathcal{U}(t), \\ x'(t) - y(t) = \cos(t)\mathcal{U}(t), \\ y(0) = 1, \quad x(0) = 0. \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} f'(t) = 4f(t) + g(t), \\ g'(t) = f(t) + 4g(t), \\ f(0) = 0, \quad g(0) = 1. \end{cases}$$

Exercice 15 Équation différentielle d'ordre 2

1. Résoudre avec la méthode de la transformée de Laplace l'équation différentielle

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

pour $x \geq 0$ avec les conditions initiales $y(0) = 3$ et $y'(0) = -7$.

2. Résoudre avec la méthode de la transformée de Laplace l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + y = e^{-t}\mathcal{U}(t)$$

pour $t \geq 0$ avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Compléments

Exercice 16 On considère l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y'(t) + 2y(t) = (6 \cos(2t) + 6 \sin(2t))\mathcal{U}(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que la transformée de Laplace de y est :

$$Y(p) = \frac{p^2 + 6p + 16}{(p+2)(p^2+4)}$$

2. Déterminer a , b et c tels que $Y(p) = \frac{a}{p+2} + \frac{bp+c}{p^2+4}$.
3. En déduire, l'expression de $y(t)$.

Exercice 17

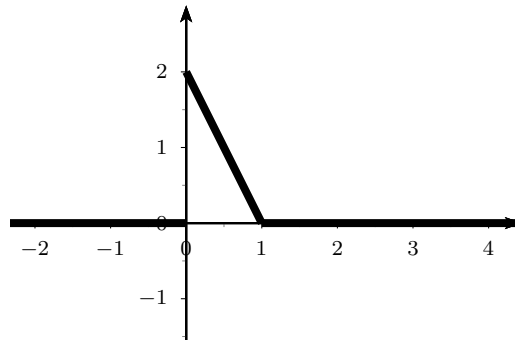
1. Déterminer les transformées de Laplace des fonctions causales suivantes :

(a) $f_1(t) = \frac{1 - e^{3t}}{4}\mathcal{U}(t)$

(c) $f_3(t) = e^{-5t}\frac{1 - e^{3t}}{4}\mathcal{U}(t)$

(b) $f_2(t) = \frac{1 - e^{3t}}{4}\mathcal{U}(t-2)$

2. Soit f_4 le signal causal représenté par :



On veut calculer la transformée de Laplace de f_4 de deux façons différentes :

- (a) Déterminer la transformée de Laplace de f_4 en utilisant la définition de la transformée de Laplace et en effectuant le calcul intégral.
- (b) Déterminer la transformée de Laplace de f_4 en écrivant d'abord f_4 avec des fonctions échelon.

Exercice 18

Déterminer les transformées de Laplace inverses des fonctions suivantes :

1. $F(p) = \frac{p^6 + 4p^3 + 3p^2}{p^7}$

3. $H(p) = \frac{p + \pi}{p^2 + 2\pi p + \pi^2 + \pi}$

2. $G(p) = \frac{5}{p^2 - 5p}$

4. $K(p) = e^{-3p} \left(\frac{p+1}{p^2+1} \right)$

Exercice 19 *Extrait de DS 2018*

Résoudre le système différentiel suivant avec f et g deux fonctions causales.

$$\begin{cases} f' + g' = -3f \\ f' - g' = f \\ f(0) = 1 \quad g(0) = 2 \end{cases}$$

Chapitre 7

Suites numériques

Exercice 1 *Attention à l'écriture !*

Soient quatre suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ respectivement définies par

$$u_n = \frac{7}{8}n^2, \quad v_n = 3n + 4, \quad w_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Calculer :

1. u_{10+3} , $u_{10} + 3$ et $u_{10} + u_3$,
2. v_{11^2} , v_{11}^2 , w_{3^3} et w_3^3 ,
3. w_{v_3} , v_{u_8} , et u_{w_2} .

Exercice 2 *Calcul des premiers termes*

Pour chaque suite calculer U_0 , U_1 , U_2 et U_3 (pour les suites définies de manière récurrente on prendra $U_0 = 1$) :

- | | | |
|-----------------------|---------------------------|------------------------------|
| 1. $U_n = 3n^2 + 1$, | 3. $U_{n+1} = 3U_n + 1$, | 5. $U_{n+1} = 3^{U_n} + 1$, |
| 2. $U_n = 3n + 1$, | 4. $U_n = 3^n + 1$, | 6. $U_{n+1} = 3U_n + n$. |

Exercice 3 *Arithmétiques ou géométriques ?*

Dire si les suites suivantes sont arithmétiques ou géométriques ou ni l'une ni l'autre.

- | | | |
|---------------------------|--------------------------|--------------------------------|
| 1. $U_n = 3n + 1$, | 3. $U_{n+1} = U_n + 3$, | 5. $U_n = n^n$, |
| 2. $U_{n+1} = 3U_n + 1$, | 4. $U_n = 3^n + 1$, | 6. $U_{n+1} = \frac{U_n}{2}$. |

Exercice 4 *Suites géométriques*

Montrer que les suites sont des suites géométriques et les écrire sous la forme $U_0 \times q^n$ puis déterminer la limite en $+\infty$.

- | | | | |
|----------------------------|----------------------|------------------------------|---------------------------------|
| 1. $U_n = \frac{3}{2^n}$, | 2. $U_n = 2^{n+1}$, | 3. $U_n = (\sqrt{2})^{3n}$, | 4. $U_n = \frac{3^n}{2^{2n}}$. |
|----------------------------|----------------------|------------------------------|---------------------------------|

Exercice 5 *Limites de suites*

Déterminer, si elles existent, les limites des suites suivantes :

- | | | |
|---|---|--|
| 1. $u_n = \left(\frac{13}{\sqrt{170}}\right)^n$, | 3. $u_n = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{-2n}$, | 5. $u_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$, |
| 2. $u_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{3n}$, | 4. $u_n = (-1)^n \times \frac{n+1}{n}$, | 6. $u_n = -3\sqrt{(1,05)^{\frac{n}{2}}}$. |

Exercice 6 *Symbole Σ*

1. Exprimer à l'aide d'un signe sigma :

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{256} \quad \text{puis} \quad B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{256}$$

2. Écrire les sommes suivantes avec le signe Σ puis les calculer :

(a) $2^5 + 2^6 + \cdots + 2^{11} + 2^{12}$.

(b) $4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19$.

(c) $1 + \pi + \pi^2 + \cdots + \pi^{99} + \pi^{100}$.

(d) La somme des entiers multiples de 7 supérieurs à 100 et plus petits que 1000.

3. Montrer que $\sum_{k=2}^{n+1} 2^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+1}$.

Exercice 7 *Calcul de sommes*

Calculer les sommes suivantes :

$$1. \sum_{k=0}^{15} 2k + 3, \quad 2. \sum_{n=1}^{12} 3 \times \frac{1}{2^n}, \quad 3. \sum_{n=2}^7 2n + 3^n, \quad 4. \sum_{k=3}^{18} e^{ki\frac{\pi}{2}}, \quad 5. \sum_{k=17}^{53} (-1)^k.$$

Exercice 8

Toutes les réponses seront données sous la forme :

- d'une expression littérale,
- d'un calcul posé
- et enfin d'une application numérique.

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme $U_0 = 3$ et de raison -4 .

Déterminer u_7 , u_{18} et $\sum_{i=7}^{18} u_i$.

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite géométrique de premier terme $U_0 = 5$ et de raison $-\frac{1}{2}$.

Déterminer u_7 , u_{18} et $\sum_{i=7}^{18} u_i$.

3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique. On donne $u_4 = 7$ et $u_7 = 1$.

Déterminer la raison et le premier terme de cette suite.

4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique. On donne $u_4 = 4$ et $u_7 = 108$.

Déterminer la raison et le premier terme de cette suite.

Exercice 9 *Sommes de suites arithmétiques et géométriques*

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit (U_n) une suite arithmétique de premier terme $U_0 = 3$ et telle que $\sum_{k=0}^{10} U_k = 99$.

Déterminer la raison de la suite.

2. Soit la suite (U_n) définie pour tout entier n par : $U_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 4n + 3$.

Calculer la somme : $S_N = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_N$ en fonction de N .

Exercice 10 *Limites de sommes*

Soit la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par son premier terme u_0 et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}.$$

1. Démontrer qu'il existe une valeur de u_0 pour laquelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite constante.
2. On pose dorénavant $u_0 = 2$ et on définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n - 1$$

Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

3. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
4. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
5. On pose $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ et $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.
 - (a) Exprimer S_n et S'_n en fonction de n .
 - (b) Déterminer les limites de S_n et de S'_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 11 *Extrait de DS 2016*

1. Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme U_0 .
Sachant que

$$U_0 + U_1 + U_2 = \frac{5}{2} \quad \text{et} \quad U_1 + U_2 + U_3 = \frac{7}{2}$$

Déterminer les valeurs de r et U_0 .

2. Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme V_0 .
Sachant que

$$V_0 + V_1 + V_2 = \frac{26}{9} \quad \text{et} \quad V_1 + V_2 + V_3 = \frac{26}{27}$$

Déterminer les valeurs de q et V_0 .

Exercice 12 Répondre par vrai ou faux en justifiant

1. Le produit de 2 suites géométriques est une suite géométrique.
2. La somme de 2 suites géométriques est une suite géométrique.
3. Le quotient de 2 suites géométriques est une suite géométrique.
4. Le produit de 2 suites arithmétiques est une suite arithmétique.
5. La somme de 2 suites arithmétiques est une suite arithmétique.

Compléments

Exercice 13 Dans chacun des cas ci-dessous exprimez u_n en fonction de n .

1. (u_n) est une suite arithmétique telle que : $u_3 = 2$ et $u_{11} = 0$.
2. (u_n) est une suite géométrique de raison q telle que : $q = 2$ et $u_0 + u_1 + \dots + u_7 = 510$.

Exercice 14 Pour chacune des suites $u_n = (-3)^{2n+1}$ et $v_n = \frac{e^{(n+1)^2}}{e^n}$:

1. Calculez les 3 premiers termes de la suite.
2. Précisez en justifiant si la suite est géométrique ou non. Si oui, précisez sa raison.

Chapitre 8

DS de l'année 2024-2025

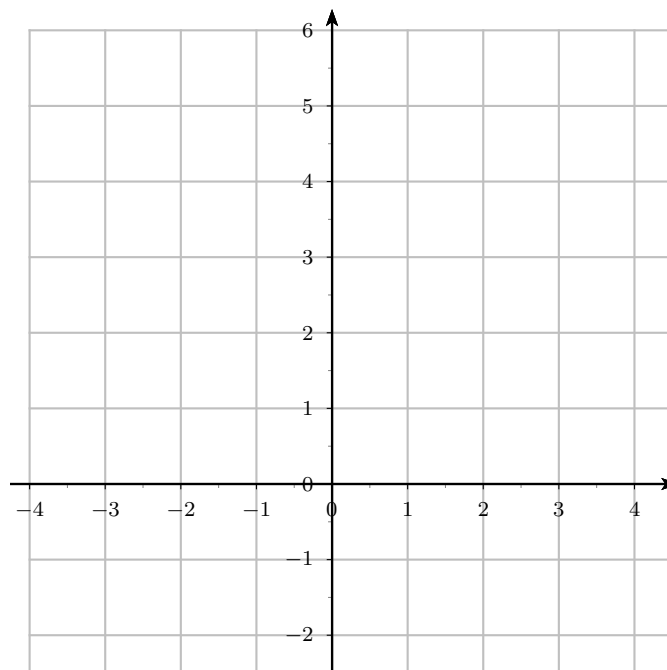
Mathématiques - Devoir Surveillé 1 Vendredi 14 février 2025 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 15 Soit la fonction $f(x) = -2 \ln\left(\frac{1}{3}x + 1\right) + 1$

1. Déterminer D l'ensemble de définition de f .
2. Calculer la dérivée de f et en déduire le sens de variation de f .
3. Déterminer les limites de f en -3 et $+\infty$ et compléter le tableau de variation de f .
4. Déterminer l'ensemble E tel que f soit bijective de D dans E
5. Déterminer la réciproque de f .
6. Déterminer l'équation de la tangente (d_0) à la courbe représentative de f en $x = 0$.
7. Tracer, sur le graphique ci-dessous, la tangente (d_0) , la ou les asymptote(s) et, le plus précisément possible, la courbe représentative de f .

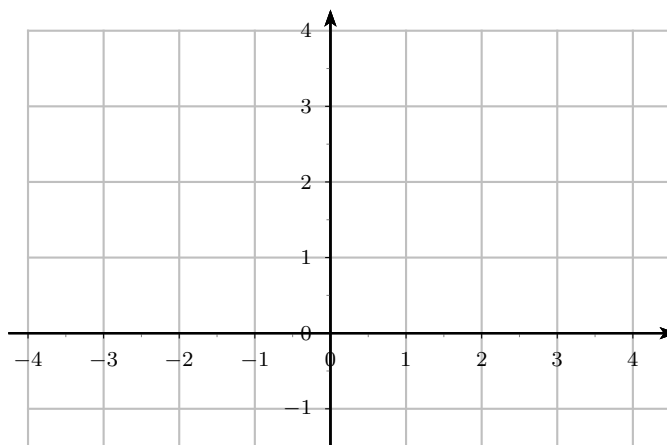


Exercice 16

- Soient les fonctions $f(x) = \frac{1}{2-5x}$, $g(x) = \frac{2x-1}{5x}$ et $h(x) = \frac{x-2}{5x}$.
 - Déterminer $f \circ g$ (sous la forme la plus simplifiée possible)
 - Déterminer $f \circ h$ (sous la forme la plus simplifiée possible)
 - Parmi les fonctions g et h , l'une d'elle est-elle la réciproque de f ?
- On considère la fonction $f(x) = \cos(2 + 3\sqrt{x})$. Décomposer f sous la forme $w \circ v \circ u(x)$ avec w , v et u trois fonctions différentes de l'identité.

Exercice 17

- Résoudre les équations et inéquations suivantes :
 - $|x - 7| = 1$
 - $|2x + 3| > 4$
 - $|x + 3| = |3x - 2| + 1$
- Tracer précisément, sur le graphique ci-dessous, les courbes représentatives des fonctions suivantes
 - $f(x) = |2x - 1|$
 - $g(x) = |x^2 - 1|$



Exercice 18 Déterminer (en justifiant la démarche) :

- $\arccos(0)$
- $\arcsin(0.5)$
- $\arctan(\sqrt{3})$
- $\arcsin\left(\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$
- $\arctan\left(\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$
- $\arccos\left(\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$

Exercice 19 On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Déterminer, sans faire le calcul, tous les produits matriciels possibles entre deux matrices distinctes. Précisez dans chacun des cas la taille de la matrice produit associée.
- Déterminer si possible : tA , $A \times C$, $A + D$ et $3D$.
- La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ est-elle l'inverse de la matrice B ?

Mathématiques - Devoir Surveillé 2

Vendredi 28 mars 2025 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Les questions suivantes sont indépendantes :

1. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Existe-t-il une matrice B telle que $A \times B$ et $A + B$ existent ?
2. Donner un exemple de matrice $C \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ non-inversible dont aucun des coefficients n'est nul.
3. Calculer les déterminants des matrices D et F suivantes :

$$D = \begin{pmatrix} -9 & 11 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -4 & 3 \\ -1 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 Soit la matrice $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

1. La matrice E est-elle inversible ?
2. Déterminer, si possible, l'inverse de E .
3. En déduire les solutions du système :
$$\begin{cases} y & +z & = & 1 \\ 2x & +5z & = & 1 \\ x & +2y & +4z & = & 6 \end{cases}$$

Exercice 3 Résoudre le système suivant

$$\begin{cases} x - y - 2z = -5 \\ 2x - 3y + 9z = 1 \\ -3x + 5y - z = 12 \end{cases}$$

Exercice 4 Soit $P(X) = X^4 + 2X^3 + 5X^2 + 8X + 4$.

1. Déterminer la multiplicité de la racine -1 .
2. Montrer que $2i$ est racine de P .
3. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 5 Les questions 1, 2, 3 et 4 sont indépendantes.

1. Poser la division euclidienne de $P_1(X) = X^5 - 3X^3 + 2X^2 + 4X + 7$ par $D(X) = X^3 + 3X^2 + 1$.
2. Le polynôme $P_2(X) = X^3 - (12 + 2i)X + 8i - 16$ admet-il une racine réelle ?
3. Soient les polynômes $P_3(X) = X^5 + 2X^4 + 3X^2 + X - 5$.
 - (a) Donner, si possible, un exemple de polynôme Q_1 tel que $\deg(P_3 \times Q_1) = 15$
 - (b) Donner, si possible, un exemple de polynôme Q_2 tel que $\deg(P_3 \circ Q_2) = 10$
 - (c) Donner, si possible, un exemple de polynôme Q_3 tel que $\deg(P_3 + Q_3) = 4$
4. Soient les polynômes $P_4(X) = X^3 + 6X^2 + 10X + 8$.

- (a) Poser la division euclidienne de P_4 par $(X + 4)$.
(b) Donner la forme factorisée de P_4 dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Mathématiques - Devoir Surveillé 3

Vendredi 23 mai 2025 - Durée : 1h10

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Calculer par la méthode de votre choix

1. $I_1 = \int_0^1 \frac{1}{t+1} e^{\ln(t+1)} dt$

2. $I_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(3t) dt$

3. $I_3 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(3x) \cos^4(3x) dx$

4. $I_4 = \int_0^1 \frac{2t^2 + t}{(t^2 + 1)(t - 2)} dt$

5. $I_5 = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx$
on pourra poser $x = t^2$

6. $I_6 = \int_0^1 \arctan(x) dx$

Exercice 2

1. Calculer $J_1 = \int_0^1 |-3t + 1| dt$

2. Calculer $J_2 = \int_0^\pi \cos\left(\frac{t}{x}\right) dt$

3. Calculer l'intégrale de la fonction g sur l'intervalle $[-2; 7]$:

- g est périodique de période 3
- $g(x) = t - 1$ sur l'intervalle $[0, 2[$
- $g(x) = -1$ sur l'intervalle $[2, 3[$

4. Donner un exemple de fonction f non-nulle telle que $\int_{-1}^2 f(t) dt = 0$.

Exercice 3

1. Dire si les équivalences suivantes sont vraies ou fausses

(a) $\frac{3t^2 + t}{(t^4 - 1)(t + 5)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^3}$

(b) $\ln(1 + t) \underset{+\infty}{\sim} t$

(c) $e^t - 1 \underset{0}{\sim} t$

2. Déterminer si les intégrales généralisées suivantes sont convergentes ou divergentes :

(a) $K_1 = \int_{-1}^{+\infty} \frac{2}{(3t + 2)^2 + 1} dt$

(b) $K_2 = \int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt$

3. Calculer K_1 et K_2 si elles convergent.

Chapitre 9

DS de l'année 2023-2024

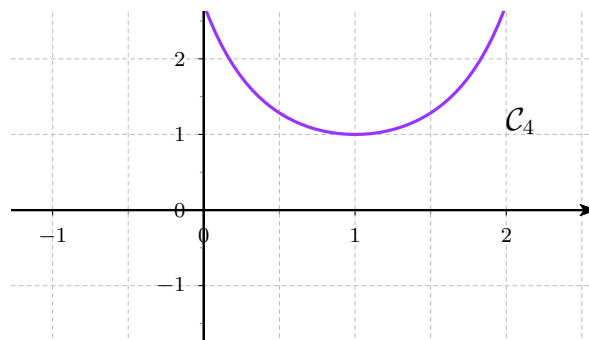
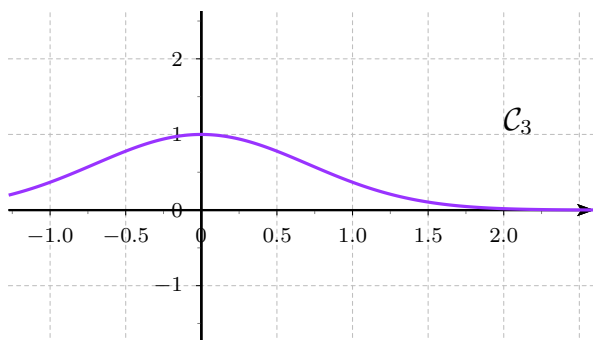
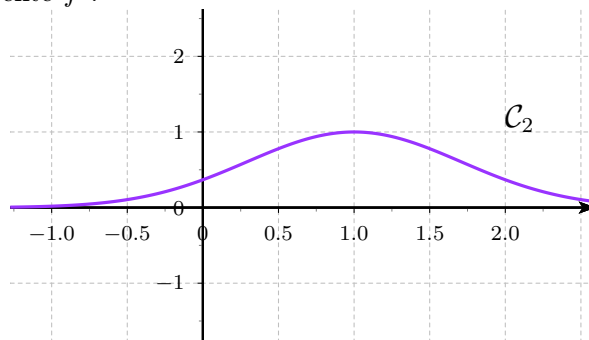
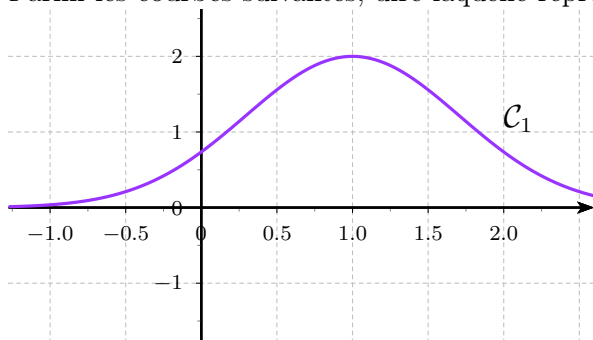
Mathématiques - Devoir Surveillé 1 Vendredi 9 février 2024 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 4 Soit la fonction $f(x) = e^{-x^2+2x-1}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Calculer la dérivée de f et en déduire le sens de variation de f .
3. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$ et compléter le tableau de variation de f .
4. Parmi les courbes suivantes, dire laquelle représente f :



Exercice 5

1. Soient les fonctions $f_1(x) = \sqrt{2x-1}$, $g_1(x) = \cos(x+2)$ et $h_1(x) = \frac{x}{x+2}$. Déterminer

(a) $f_1 \circ g_1$

(b) $h_1 \circ g_1$

(c) $h_1 \circ h_1$

2. On considère la fonction $f(x) = (x + 3)^3 - 5$. Décomposer f sous la forme $w \circ v \circ u(x)$ avec w , v et u trois fonctions différentes de l'identité.

3. Résoudre les équations et inéquations suivantes :

(a) $|2x - 3| = 7$

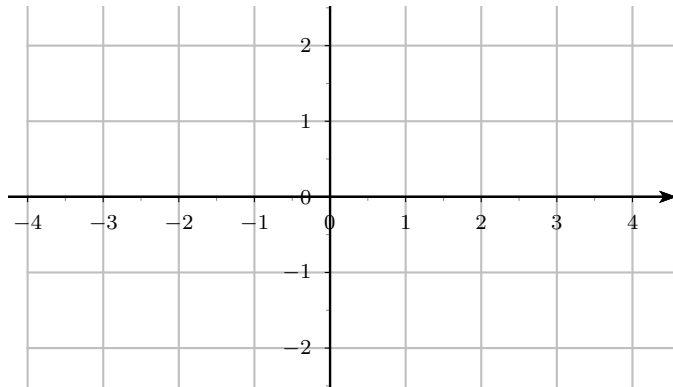
(b) $|x + 5| < 2$

(c) $|3x + 1| = |x - 2| + 1$

4. Tracer, sur le graphique ci-dessous, les courbes représentatives des fonctions suivantes

(a) $f(x) = |1 - \frac{1}{2}x|$

(b) $g(x) = |\sin(x)|$



Exercice 6

1. Calculer les limites suivantes :

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+1}}{e^{x-3}}$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{x+2}\right)$

(e) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 6}$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+3)}{x-4}$

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + e^{-x} - \ln(x)$

2. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = \sqrt{2x-1}$

(c) $h(x) = \frac{3x}{2x-1}$

(b) $g(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$

(d) $k(x) = (3x+4)\ln(-2x+1)$

Exercice 7

1. Déterminer le module et l'argument de : $z = \frac{R_1 + jC\omega}{R_2 + jC\omega}$

2. Déterminer ω en fonction de ω_0 : $1 + \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\omega}{2\omega_0}$

Exercice 8 On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

1. Les calculs suivants sont-ils possibles ? Si oui, faites le calcul !

-
- (a) $A + C$ (b) $A \times B$ (c) $4 \times C$ (d) $B \times C$ (e) tA

2. Déterminer la matrice D telle que :

$$D \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad d_{i,j} = 2i - j$$

3. On considère les matrices E et F , sont elles l'inverse l'une de l'autre ?

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Mathématiques - Devoir Surveillé 2

Vendredi 29 mars 2024 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Soit la fonction $f(x) = \ln(x+2) - 3$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f . On le notera D par la suite.
2. Montrer que f est bijective de D dans $\mathbb{R}$.
3. Déterminer la réciproque de f .

Exercice 2 Donner les valeurs en justifiant la démarche :

- | | |
|--|--|
| 1. $\arcsin(0.5)$ | 4. $\arccos\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ |
| 2. $\arccos(-1)$ | 5. $\arccos\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ |
| 3. $\arctan\left(\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ | 6. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \arcsin(t)$ |

Exercice 3 Soient les matrices A , B et C suivantes

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 21 \\ 4 & -12 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les déterminants de A , B et C
2. A , B et C sont-elles inversibles ?
3. Calculer, si possible, A^{-1} et B^{-1}

Exercice 4 Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode de Gauss.

1.

$$\begin{cases} x + y - 2z = 7 \\ 2x + 3y - 5z = 19 \\ -3x + 5y - z = 15 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} 3a + 2b = 1 \\ -7a - 4b = 5 \end{cases}$$

Exercice 5 Les questions 1,2 et 3 sont indépendantes.

1. Soient les polynômes $P_1(X) = X^5 + 2X^4 + 3X^2 + X - 5$ et $Q(X) = X(X+1)^2$.
Donner le degré de :

(a) $R_1(X) = P(X) \times Q(X)$

(c) $R_3(X) = P(X) - (X^2 + 1)Q(X)$

(b) $R_2(X) = Q \circ P(X)$

2. Déterminer un polynôme P_2 tel que :

- $\deg(P_2) = 8$
- $P_2 \in \mathbb{R}[X]$
- -3 et $1+2i$ sont racines simples de P_2
- 42 est racine de multiplicité 3 de P_2

3. Le polynôme $P_3(X) = X^3 + (1+3i)X^2 + 2 - 3i$ admet-il une racine réelle ?

Exercice 6 Soient les polynômes $P(X) = X^5 - 2X^4 - 3X^3 - 12X^2 - 28X - 16$.

1. Montrer que $2i$ est racine de P
2. $a = -1$ est racine de P . Déterminer sa multiplicité.
3. Poser la division euclidienne de P par $(X-4)$.
4. Donner la forme factorisée de P dans $\mathbb{C}[X]$.
5. Donner la forme factorisée de P dans $\mathbb{R}[X]$.

Mathématiques - Devoir Surveillé 3

Vendredi 7 juin 2024 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Calculer par la méthode de votre choix

1. $I_1 = \int_{-4}^4 e^{-\frac{1}{4}t+3} dt$

3. $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(3x) \cos(5x) dx$

2. $I_2 = \int_{-2}^2 t^3 e^{t^2+3} dt$

4. $I_4 = \int_1^e \frac{2}{\ln(t)+4} \times \frac{1}{t} dt$

(indication : on pourra poser le changement de variable $u = \ln(t)$)

Exercice 2

1. Déterminer la D.E.S de la fonction $f(t) = \frac{25x^2}{(x^2+3x-4)(x+4)}$.

2. Calculer $I_6 = \int_{-2}^0 \frac{25x^2}{(x^2+3x-4)(x+4)} dt$

Exercice 3

1. Calculer l'intégrale de la fonction g sur l'intervalle $[-2; 7]$:
— g est périodique de période 3

- $g(x) = 3$ sur l'intervalle $[0, 2[$
 - $g(x) = -1$ sur l'intervalle $[2, 3[$
2. Calculer l'intégrale $J_3 = \int_{-1}^4 |x^2 - 1| dx$
 3. Soit p un réel strictement positif. Déterminer en fonction de p : $\int_0^{+\infty} t e^{-pt} dt$

Exercice 4

1. Déterminer la nature de chaque intégrale généralisée :

$$(a) K_1 = \int_{-1}^{+\infty} \frac{5}{(2t+3)^2+1} dt \qquad (b) K_2 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t^3}} dt$$

2. Calculer la valeur de K_1

Exercice 5

Dire si les équivalences suivantes sont vraies ou fausses

1. $\frac{t^2+t}{(t^3-1)(t+5)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$
2. $\sin(\sqrt{t}) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{t}$
3. $\cos(t) - 1 \underset{0}{\sim} t$

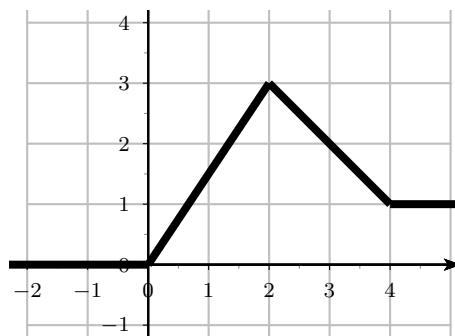
Exercice 6

1. Tracer, sur votre copie le plus proprement possible, les représentations graphiques des fonctions suivantes :

$$(a) f(t) = \left(-\frac{1}{2}t + 1\right) \mathcal{U}(t) + (t-1) \mathcal{U}(t-2) - \frac{t}{2} \mathcal{U}(t-4)$$

$$(b) f(t) = \mathcal{U}(t-1) + 2\mathcal{U}(t-2) - 5\mathcal{U}(t-3)$$

2. Déterminer une écriture de la fonction tracée ci-dessous avec des fonctions échelons :



Exercice 7

Calculer les transformées de Laplace de chacune des fonctions suivantes :

1. $f_1(t) = (3t^4 - 2t^3 + t) \mathcal{U}(t)$
2. $f_2(t) = (e^{-3t} - e^{3t}) \mathcal{U}(t)$
3. $f_3(t) = \sin(3t) \mathcal{U}\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$
4. $f_4(t) = \mathcal{U}(t-2) - 3t^2 \mathcal{U}(t-3)$