

Mathématiques

Semestre 2

Cours de Mathématiques appliquées

Année 2025-2026

Nom :
Prénom :
Groupe :

Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve.
N. Brissard

Table des matières

1	Fonction réciproque	4
1.1	Bijection	4
1.2	Fonction réciproque	7
1.3	Arccos - Arcsin - Arctan	10
2	Systèmes linéaires et matrices	16
2.1	Méthode de Gauss	16
2.1.1	Résoudre un système à 2 équations et 2 inconnues avec la méthode de Gauss . .	16
2.1.2	Résoudre un système à 3 équations et 3 inconnues avec la méthode de Gauss . .	17
2.2	Systèmes linéaires et matrices	18
2.3	Déterminant d'une matrice carrée	19
2.4	Inverse d'une matrice carrée : méthodes de calcul	23
2.4.1	Méthode 1	23
2.4.2	Méthode 2	24
3	Polynômes	25
3.1	L'espace des polynômes	25
3.2	Racines d'un polynôme	26
3.3	Division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$	29
3.4	Décomposition en éléments simples (D.E.S.)	30
3.4.1	Partie entière et partie fractionnaire	30
3.4.2	Cas de première espèce - <u>racines simples</u>	32
3.4.3	Cas de première espèce - <u>racines multiples</u>	34
3.4.4	Cas de seconde espèce	35
3.4.5	Application au calcul d'intégrales	38
4	Intégrale d'une fonction	40
4.1	Point de vue graphique : lien entre aire et intégrale	40
4.1.1	Propriétés graphiques de l'intégrale	41
4.2	Méthodes de calcul intégral	43
4.2.1	Méthode 2 : Calcul de primitive	43
4.2.2	Méthode 3.1 : Fractions rationnelles et D.E.S.	46
4.2.3	Méthode 3.2 : Fonction « polynômiale » en sinus et cosinus	47
4.2.4	Méthode 4 : Intégration par parties (IPP)	49

4.2.5	Méthode 5 : Changement de variable	50
5	Intégrale généralisée (ou intégrale impropre)	51
5.1	Notion d'intégrale généralisée	51
5.2	Critères de convergence	53
6	Transformée de Laplace	55
6.1	Signaux causaux	55
6.2	La transformée de Laplace	56
6.3	Propriétés	58
6.3.1	Linéarité	58
6.3.2	Multiplication par e^{-at}	58
6.3.3	Dérivation temporelle	59
6.3.4	Retard temporel	60
6.4	Transformée inverse	60
6.5	Application aux équations différentielles	61
6.6	Formulaire	62
7	Suites numériques	63
7.1	Vocabulaire et notations	63
7.2	Limite d'une suite	64
7.3	Somme des termes d'une suite	65

Chapitre 1

Fonction réciproque

1.1 Bijection

Définition (ENSEMBLE IMAGE).

Soit f une fonction définie sur D_f . Soit $I \subseteq D_f$. On note $f(I)$ l'ensemble image de I par f défini par :

$$f(I) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists t \in I, f(t) = y\}$$

Exemple. Si on considère $f(t) = t^2$, alors :

- $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$
- $f(\mathbb{R}_-) = \mathbb{R}_+$
- $f([1, 4]) = [1, 16]$
- $f([-2, 3]) = [0, 9]$

Remarque. La notation $f : \begin{cases} \mathbb{R}_- & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ t & \mapsto t^2 \end{cases}$ signifie que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}_-$, que les images de f sont dans $\mathbb{R}_+$ et que $f(t) = t^2$.

Définition (FONCTION INJECTIVE).

Soit $f : D_f \rightarrow E$ une fonction définie sur D_f et à valeurs dans E . On dit que f est :

- *injective* de D_f dans E si et seulement si pour tout y dans E il existe **au plus un** antécédent de y par f . Ce qui s'écrit encore :

$$\forall (t_1, t_2) \in D_f^2, \quad f(t_1) = f(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$$

Exemple.

La fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto t^2 \end{cases}$ est injective.

En effet, pour tout $t_1 \in \mathbb{R}_+$ et $t_2 \in \mathbb{R}_+$,

$$f(t_1) = f(t_2) \Rightarrow t_1^2 = t_2^2 \Rightarrow t_1 = t_2 \text{ ou } t_1 = -t_2$$

or comme t_1 et t_2 sont positifs, on a forcément $t_1 = t_2$.

Définition (FONCTION SURJECTIVE =).

Soit $f : D_f \rightarrow E$ une fonction définie sur D_f et à valeurs dans E . On dit que f est :

- *surjective* de D_f dans E si et seulement si pour tout y dans E il existe **au moins un** antécédent de y par f . Ce qui s'écrit encore :

$$\forall y \in E, \quad \exists t \in D_f \text{ tel que } f(t) = y$$

Exemple.

La fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ t & \mapsto t^2 \end{cases}$ est surjective.

En effet, pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, $f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$, ce qui signifie que $\sqrt{y}$ est un antécédent de y par f .

Définition (FONCTION BIJECTIVE).

Soit $f : D_f \rightarrow E$ une fonction définie sur D_f et à valeurs dans E . On dit que f est :

- *bijective* de D_f dans E si et seulement si elle est injective **et** surjective de D_f dans E . Dans ce cas, pour tout y dans E il existe **exactement un** antécédent de y par f .

Exemple.

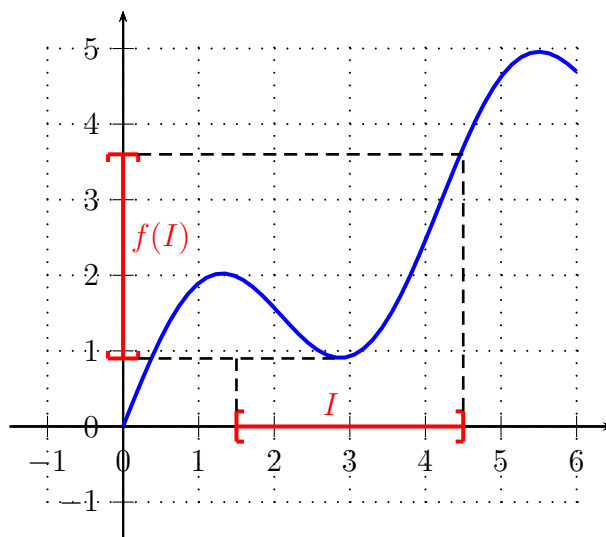
La fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ t & \mapsto t^2 \end{cases}$ est surjective.

En reprenant les deux raisonnements précédents, on a bien que f est injective et surjective.

Remarque. On remarque que le caractère injectif, surjectif et bijectif d'une fonction dépend autant de son expression que des ensembles de définition et ensemble image!

Théorème (DES VALEURS INTERMÉDIAIRES (TVI)).

Soit I un intervalle et soit f une fonction continue sur I . Alors $f(I)$, l'ensemble image de I par f , est un intervalle.

**Théorème.**

Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[a, b]$ telle que :

$$f(a) \times f(b) < 0$$

L'équation $f(t) = 0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[a, b]$.

Remarques.

1. Il n'y a pas forcément unicité de la solution
2. La réciproque est fausse

Théorème.

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I . Si f est strictement monotone sur I alors f est bijective de I dans $f(I)$.

Exemple.

Soit $f(t) = 12 \left(1 - e^{-\frac{t}{100}}\right)$.

La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a

$$f'(t) = \frac{12}{100} e^{-\frac{t}{100}}$$

La dérivée de f est toujours positive et la fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Comme $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = -\infty$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 12$,
on a $f(\mathbb{R}) =]-\infty; 12[$, et on en déduit que

f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $] - \infty; 12[$

1.2 Fonction réciproque

Définition (FONCTION RÉCIPROQUE).

Soit f une fonction bijective de D dans E . On appelle *fonction réciproque* de f , la fonction, notée f^{-1} , définie de E dans D par :

$$\forall t \in E, \quad f^{-1}(t) = b \Leftrightarrow f(b) = t$$

Ceci signifie que f^{-1} est la fonction qui donne l'antécédent de t par f (cet antécédent est unique puisque f est supposée bijective).

Exemples.

1. $f(t) = e^t$ est définie et bijective de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\ln(e^t) = t$, donc $f^{-1}(t) = \ln(t)$ de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
2. $g(t) = t^2$ est définie et bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt{t^2} = |t| = t$, donc $g^{-1}(t) = \sqrt{t}$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$.

Remarque.

Attention à ne pas confondre la fonction réciproque de f , notée $f^{-1}(t)$, et l'inverse de $f(t)$, noté $(f(t))^{-1} = \frac{1}{f(t)}$.

Méthode

Pour déterminer l'expression de la fonction réciproque f^{-1} , il faut trouver t tel que $f(t) = y$.

L'expression de t sera alors donnée en fonction de y .

Cette expression est la fonction $f^{-1}(y)$.

Exemple.

Soit $f(t) = \frac{t-1}{t-2}$ avec $t \in]2, +\infty[$.

On a vu dans l'exemple 5 que f est bijective de $]2, +\infty[$ dans $]1, +\infty[$. Soit $y \in]1, +\infty[$ tel que :

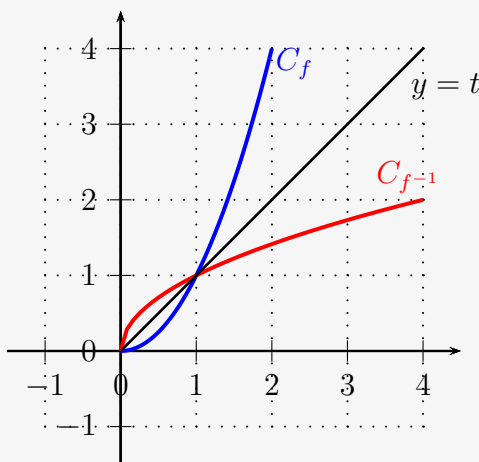
$$\begin{aligned} f(t) = y &\Leftrightarrow \frac{t-1}{t-2} = y \\ &\Leftrightarrow t-1 = y(t-2) = ty - 2y \\ &\Leftrightarrow t - ty = 1 - 2y \quad (\text{on isole les termes avec des } t \text{ à gauche et les termes sans } t \text{ à droite}) \\ &\Leftrightarrow t(1-y) = 1-2y \\ &\Leftrightarrow t = \frac{1-2y}{1-y} \end{aligned}$$

Donc $f^{-1}(y) = \frac{1-2y}{1-y}$ sur $]1, +\infty[$.

Théorème.

Soit f une fonction bijective de D dans E . Alors :

1. $\forall t \in D, f^{-1} \circ f(t) = t$.
2. $\forall t \in E, f \circ f^{-1}(t) = t$.
3. $\forall t \in D, (f^{-1})^{-1}(t) = f(t)$.
4. Les courbes représentative des fonctions f et f^{-1} , notées respectivement C_f et $C_{f^{-1}}$, sont la symétrie l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = t$.



Si de plus la fonction f est dérivable et que $f'(t) \neq 0$ pour tout $t \in D$, alors f^{-1} est dérivable sur E et pour tout $t \in E$,

$$(f^{-1})'(t) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(t)}$$

Remarque.

Les points 1. et 2. permettent de montrer qu'une fonction g est la réciproque de f .

Exemple.

Soient $f(t) = t^2 + 2t + 2$ définie sur $] - 1, +\infty[$ et $g(t) = \sqrt{t - 1} - 1$ définie sur $]1, +\infty[$.

f est définie et dérivable sur l'intervalle $] - 1, +\infty[$.

Pour tout $t \in] - 1, +\infty[$, $f'(t) = 2t + 2 > 0$, donc f est strictement croissante, elle est donc bijective de $] - 1, +\infty[$ dans $f(] - 1, +\infty[) =]1, +\infty[$.

Pour tout $t \in] - 1, +\infty[$,

$$g \circ f = \sqrt{f(t) - 1} - 1 = \sqrt{t^2 + 2t + 1} - 1 = \sqrt{(t + 1)^2} - 1 = |t + 1| - 1 = t$$

Donc, pour tout $t \in]1, +\infty[$, $g(t) = f^{-1}(t)$.

1.3 Arccos - Arcsin - Arctan

Définition (FONCTION ARCCOS).

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{aligned} f : [0, \pi] &\longrightarrow [-1, 1] \\ t &\longmapsto \cos(t) \end{aligned}$$

On appelle *Arccos* la fonction réciproque de f .

Théorème (PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION ARCCOS).

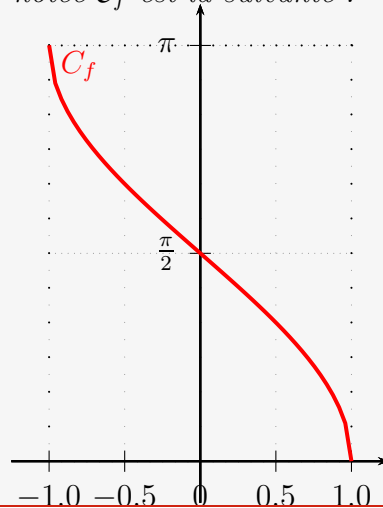
Soit f la fonction définie par :

$$\begin{aligned} f : [-1, 1] &\longrightarrow [0, \pi] \\ t &\longmapsto \text{Arccos}(t) \end{aligned}$$

- La fonction f est dérivable sur $] -1, 1[$ et pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$f'(t) = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

- La courbe représentative de f , notée C_f est la suivante :



Démonstration.

La fonction $\cos$ est dérivable sur $[0, \pi]$ et sa dérivée $(-\sin)$ ne s'annule pas sur $]0, \pi[$. La fonction *Arccos* est donc dérivable sur $\cos([0, \pi]) =] -1, 1[$ et sa dérivée est donnée par la formule :

$$(f^{-1})'(t) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(t)}$$

On a alors :

$$\text{Arccos}'(t) = \frac{1}{-\sin(\text{Arccos}(t))}$$

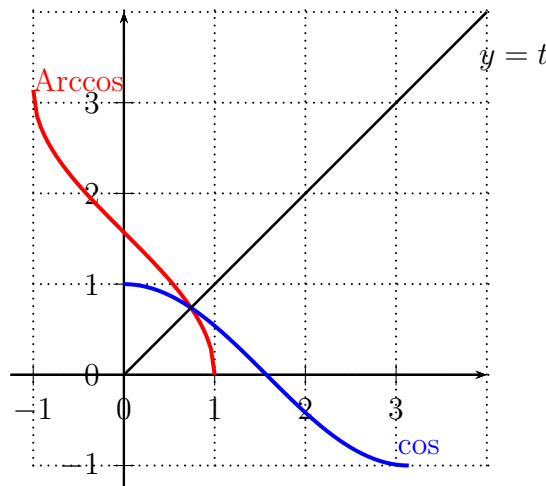
Grâce à la formule : $\forall t \in \mathbb{R}, \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$, on a :

$$\begin{aligned} \cos^2(\text{Arccos}(t)) + \sin^2(\text{Arccos}(t)) &= 1 \Leftrightarrow t^2 + \sin^2(\text{Arccos}(t)) = 1 \\ &\Leftrightarrow \sin^2(\text{Arccos}(t)) = 1 - t^2 > 0 \text{ puisque } t \in]-1, 1[\\ &\Leftrightarrow \sin(\text{Arccos}(t)) = \sqrt{1 - t^2} \end{aligned}$$

D'où :

$$\text{Arccos}'(t) = -\frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}$$

La courbe représentative de Arccos est obtenue en faisant la symétrie de la courbe représentative de cos par rapport à la droite $y = t$.

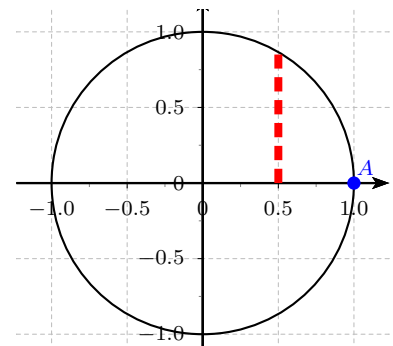


□

Méthode : Pour déterminer la valeur de $\text{Arccos}(t)$, on se pose la question : *Quel est l'angle de $[0, \pi]$ dont le cosinus vaut t ?*

Exemple.

$$\text{Arccos}\left(\frac{1}{2}\right) = \text{"Quel est l'angle de } [0, \pi] \text{ dont le cosinus vaut } \frac{1}{2} \text{"} = \frac{\pi}{3}$$



Définition (FONCTION ARCSIN).

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{aligned} f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] &\longrightarrow [-1, 1] \\ t &\longmapsto \sin(t) \end{aligned}$$

On appelle *Arcsin* la fonction réciproque de f .

Théorème (PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION ARCSIN).

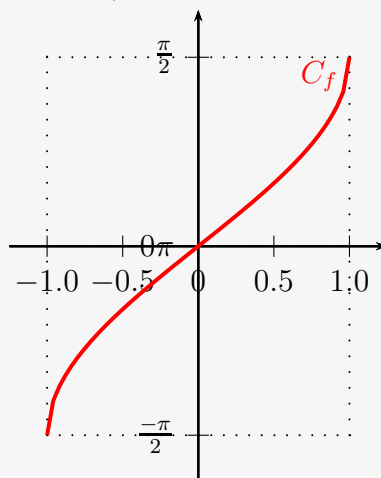
Soit f la fonction définie par :

$$\begin{aligned} f : [-1, 1] &\longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ t &\longmapsto \text{Arcsin}(t) \end{aligned}$$

- La fonction f est dérivable sur $] -1, 1[$ et pour tout $t \in] -1, 1[$,

$$f'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

- La courbe représentative de f , notée $\mathcal{C}_f$ est la suivante :



Démonstration.

La fonction $\sin$ est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et sa dérivée ($\cos$) ne s'annule pas sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. La fonction Arcsin est donc dérivable sur $\sin\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) =]-1, 1[$ et de la même manière que pour Arccos , on a :

$$\text{Arcsin}'(t) = \frac{1}{\cos(\text{Arcsin}(t))}$$

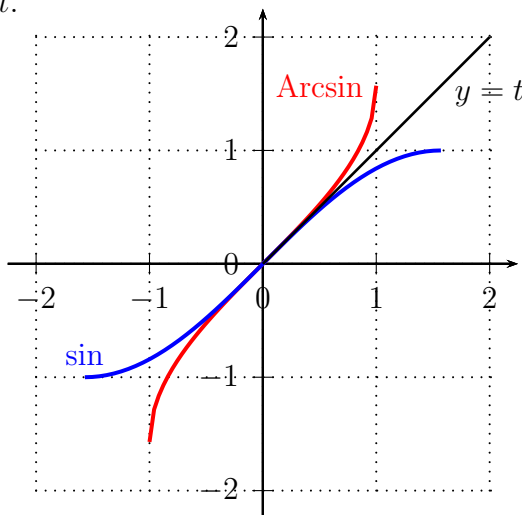
De plus

$$\begin{aligned}\cos^2(\text{Arcsin}(t)) + \sin^2(\text{Arcsin}(t)) &= 1 \Leftrightarrow \cos^2(\text{Arcsin}(t)) + t^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \cos^2(\text{Arcsin}(t)) = 1 - t^2 > 0 \text{ puisque } t \in]-1, 1[\\ &\Leftrightarrow \cos(\text{Arcsin}(t)) = \sqrt{1 - t^2}\end{aligned}$$

D'où :

$$\text{Arcsin}'(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}$$

La courbe représentative de Arcsin est obtenue en faisant la symétrie de la courbe représentative de sin par rapport à la droite $y = t$.



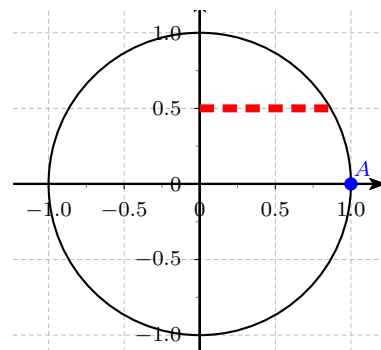
□

Méthode

Pour déterminer la valeur de $\text{Arcsin}(t)$, on se pose la question : *Quel est l'angle de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dont le sinus vaut t ?*

Exemple.

$$\text{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right) = \text{"Quel est l'angle de } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ dont le sinus vaut } \frac{1}{2} \text{"} = \frac{\pi}{6}$$



Définition (FONCTION ARCTAN).

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{aligned} f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \tan(t) \end{aligned}$$

On appelle *Arctan* la fonction réciproque de f .

Théorème (PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION ARCTAN).

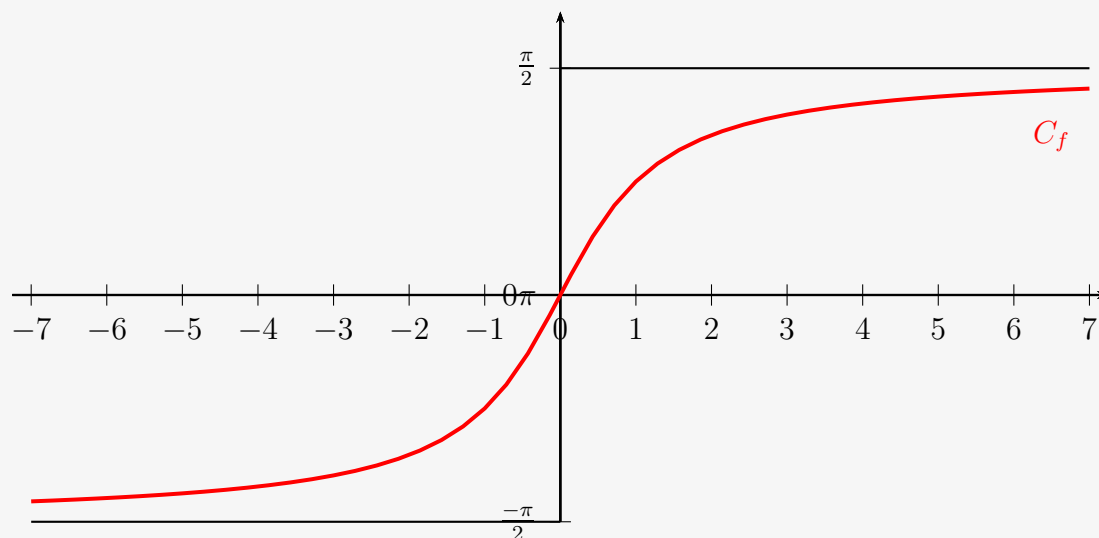
Soit f la fonction définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ t &\longmapsto \text{Arctan}(t) \end{aligned}$$

- La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f'(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

- La courbe représentative de f , notée C_f est la suivante :

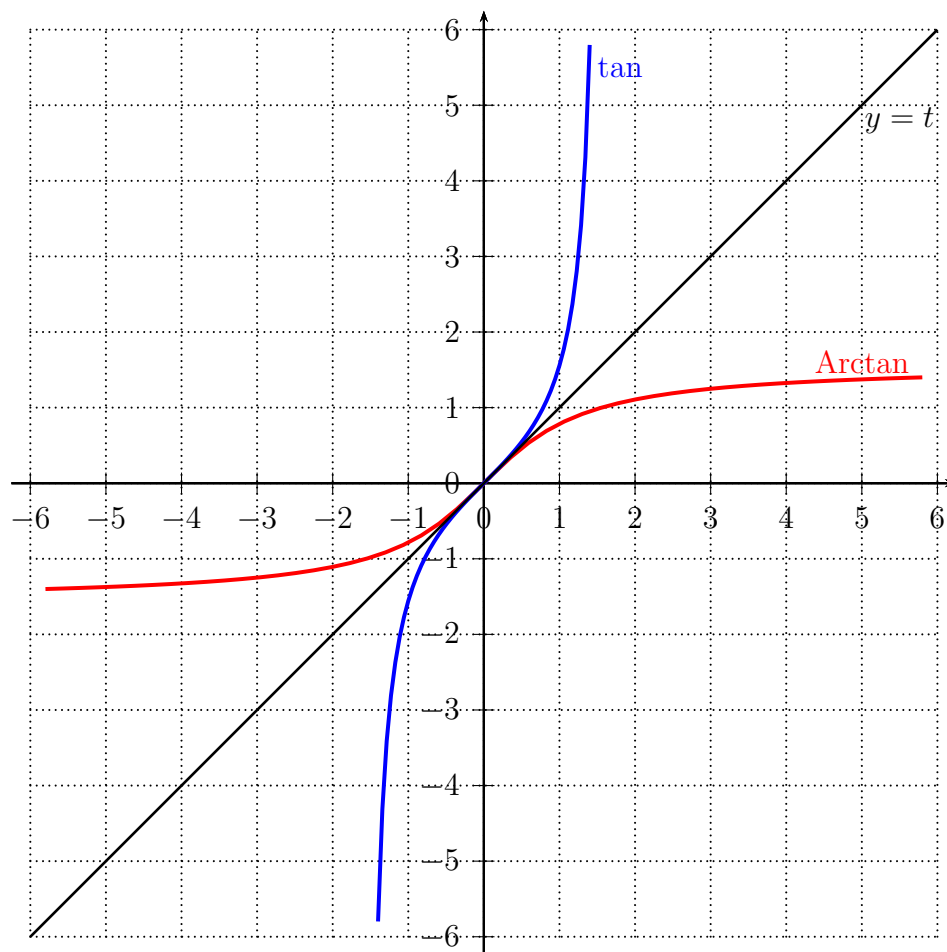


Démonstration.

La fonction $\tan$ est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et sa dérivée $(1 + \tan^2)$ ne s'annule pas sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. La fonction Arctan est donc dérivable sur $\tan(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) = \mathbb{R}$ et de la même manière que précédemment,

$$\text{Arctan}'(t) = \frac{1}{1 + \tan^2(\text{Arctan}(t))} = \frac{1}{1 + t^2}$$

La courbe représentative de Arctan est obtenue en faisant la symétrie de la courbe représentative de $\tan$ par rapport à la droite $y = t$.



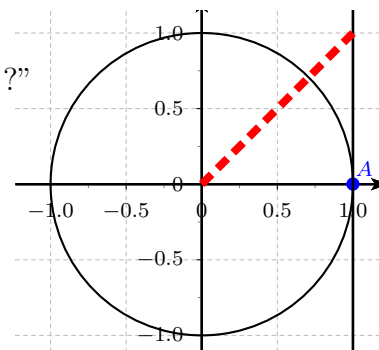
□

Méthode

Pour déterminer la valeur de $\text{Arctan}(t)$, on se pose la question : *Quel est l'angle de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dont la tangente vaut t ?*

Exemple.

$$\begin{aligned} \arctan(1) &= \text{Quel est l'angle de }]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\text{ dont la tangente vaut } 1 ? \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$



Chapitre 2

Systèmes linéaires et matrices

2.1 Méthode de Gauss

La méthode de Gauss permet de mettre n'importe quel système d'équations sous la forme d'un système triangulaire, c'est à dire sous la forme :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ b_2y + c_2z &= d_2 \\ c_3z &= d_3 \end{cases}$$

Les systèmes triangulaires sont particulièrement simples à résoudre!

Exemple.

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x + y - z &= 2 \\ 2y + z &= 1 \\ 3z &= 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y - 1 &= 2 \\ 2y + 1 &= 1 \\ z &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 0 &= 3 \\ y &= 0 \\ z &= 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x &= 1 \\ y &= 0 \\ z &= 1 \end{cases} \end{aligned}$$

2.1.1 Résoudre un système à 2 équations et 2 inconnues avec la méthode de Gauss

On cherche à résoudre par la méthode de Gauss un système de la forme suivante :

$$\begin{cases} 2x + y &= 1 \\ 3x + 2y &= 2 \end{cases}$$

On commence par multiplier l'équation L_1 par **3** et l'équation L_2 par **2**. Le système devient :

$$\begin{cases} \textcolor{red}{2}x + y = 1 & L_1 \\ \textcolor{red}{3}x + 2y = 2 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 3y = 3 & L'_1 = \textcolor{blue}{3} \times L_1 \\ 6x + 4y = 4 & L'_2 = \textcolor{red}{2} \times L_2 \end{cases}$$

Puis on soustrait L'_1 à L'_2 , on obtient :

$$\begin{cases} 2x + y = 1 & L_1 \\ y = 1 & L''_2 = L'_2 - L'_1 \end{cases}$$

On obtient alors y , qu'on peut ensuite remplacer dans l'équation L_1 pour déterminer x .

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

2.1.2 Résoudre un système à 3 équations et 3 inconnues avec la méthode de Gauss

On cherche à résoudre par la méthode de Gauss un système de la forme suivante :

$$\begin{cases} x - y + z = 1 & L_1 \\ -4x + 3y - z = 2 & L_2 \\ 2x - y + z = 2 & L_3 \end{cases}$$

On choisit la ligne L_1 comme « pivot » et on remplace L_2 par $L_2 + 4 \times L_1$ et on remplace L_3 par $L_3 - 2 \times L_1$ on obtient :

$$\begin{cases} x - y + z = 1 & L_1 \\ -y + 3z = 6 & L'_2 = L_2 + 4 \times L_1 \\ y - z = 0 & L'_3 = L_3 - 2 \times L_1 \end{cases}$$

On remarque alors que les équations L'_2 et L'_3 forment un système à 2 équations et 2 inconnues (y et z). On peut alors appliquer la méthode précédente pour déterminer z puis y : on choisit la ligne L'_2 comme pivot et on remplace L'_3 par $L'_3 + L'_2$:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 & L_1 \\ -y + 3z = 6 & L'_2 \\ 2z = 6 & L''_3 = L'_3 + L'_2 \end{cases}$$

Enfin, on détermine z , puis y puis x :

$$\begin{cases} x - y + 3 = 1 \\ -y + 3 \times 3 = 6 \\ z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 + 3 = 1 \\ y = 3 \\ z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 3 \end{cases}$$

2.2 Systèmes linéaires et matrices

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice carrée. Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Si on calcule le produit matriciel AX , on trouve :

$$AX = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n \end{pmatrix}$$

D'où, l'équation matricielle $AX = B$ équivaut au système d'équations :

$$(S) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Exemple. Le système d'équations

$$\begin{cases} x + 2y + z & = & 0 \\ x - 2y + 2z & = & 11 \\ -x + 6y - 5z & = & -28 \end{cases}$$

s'écrit sous la forme $AX = B$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R}) \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ -28 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$

Remarque.

On écrit dans A les coefficients de x , y et z , dans X les inconnues (x , y et z) et dans B les constantes.

Définition (MATRICE INVERSE).

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice carrée de taille n inversible.

La *matrice inverse* de A , notée A^{-1} , est la matrice définie par :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

où I_n est la matrice identité de taille n .

Exemple.

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

B est la matrice inverse de A . En effet $AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Pour résoudre matriciellement le système (S) , il faut trouver le vecteur X tel que $AX = B$. Si la matrice A est inversible, on peut alors faire le raisonnement suivant

$$\begin{aligned} AX = B &\Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \\ IdX &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

Pour résoudre un système matriciellement, il faut donc :

1. Prouver que la matrice A est inversible (grâce au déterminant)
2. Trouver la matrice inverse A^{-1}

2.3 Déterminant d'une matrice carrée

Le déterminant est un outil qui permet de déterminer si une matrice est inversible.

Définition.

Soit A une matrice carrée de taille 2 telle que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors

$$\det(A) = ad - cb = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{matrix} - \\ + \end{matrix}$$

Définition (MÉTHODE DE SARRUS).

Soit A une matrice carrée de taille 3 telle que $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$. Alors

$$\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3} - a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3} - a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \begin{matrix} - \\ - \\ + \\ + \\ + \\ + \end{matrix}$$

Théorème.

Soit A une matrice carrée.

A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$

Exemple.

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

On a :

$$\det(A) = 3 \times 2 - 1 \times 6 = 0$$

donc la matrice A n'est pas inversible.

$$\det(B) = 1 \times 0 \times 4 + 2 \times 1 \times 3 + 0 \times 2 \times 1 - 2 \times 2 \times 4 - 1 \times 1 \times 1 - 0 \times 0 \times 3 = 6 - 16 - 1 = -11$$

donc la matrice B est inversible.

Théorème (PROPRIÉTÉS DU DÉTERMINANT).

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice carrée.

1. $\det({}^t A) = \det(A)$.
2. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.
3. Si A est une matrice triangulaire, alors $\det(A)$ est égal au produit des termes de la diagonale.

Théorème (PROPRIÉTÉS COMPLÉMENTAIRES).

1. Un déterminant dont une colonne (resp. une ligne) est formée uniquement de 0 est nul.
2. Un déterminant qui a deux colonnes (resp. deux lignes) identiques est nul.
3. Un déterminant dont une colonne (resp. une ligne) est combinaison linéaire des **autres** colonnes (resp. des **autres** lignes) est nul.
4. Le déterminant est inchangé si l'on ajoute à une colonne (respectivement à une ligne) une combinaison linéaire des **autres** colonnes (resp. des **autres** lignes). Autrement dit, si on effectue des opérations du type $C_j \leftarrow C_j + \alpha C_i$ (resp. $L_j \leftarrow L_j + \alpha L_i$), le déterminant reste le même.
5. Le déterminant change de signe si on permute 2 lignes ou 2 colonnes.

Remarque.

- Une méthode pour calculer un déterminant, est donc, d'effectuer des opérations sur les lignes et les colonnes, afin d'obtenir une matrice triangulaire, puis de multiplier les termes de la diagonale.
- Pour triangulariser une matrice, on peut par exemple utiliser la méthode de Gauss.

Exemple.

Calculons le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & -4 \\ -3 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & -6 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ en utilisant la méthode de Gauss.

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & -4 \\ -3 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & -6 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 7 \end{vmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - \frac{-3}{2}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{2}L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{2}L_1 \end{array} \\ &= - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 7 \end{vmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_2 \end{array} \\ &= - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \end{vmatrix} \begin{array}{l} L_4 \leftarrow L_4 - \frac{-4}{6}L_3 \end{array} \\ &= -2 \times 2 \times 6 \times \frac{17}{3} = -136 \end{aligned}$$

Définition (MINEUR).

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice carrée de taille n dont les coefficients sont notés $a_{k,l}$. Soient i et j deux entiers compris entre 1 et n .

On appelle *mineur* de $a_{i,j}$, le déterminant $\Delta_{i,j}$ de la matrice extraite de A , obtenue en supprimant la i -ème ligne et la j -ème colonne de A .

Exemple.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{mineur de } a_{1,2} = \Delta_{1,2} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Définition (COFACTEUR).

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice carrée de taille n dont les coefficients sont notés $a_{k,l}$. Soient i et j deux entiers compris entre 1 et n .

On appelle *cofacteur* de $a_{i,j}$ la quantité :

$$(-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$$

Exemple.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{cofacteur de } a_{1,2} = (-1)^{1+2} \Delta_{1,2} = -1 \times (-1) = 1$$

Théorème (DÉVELOPPEMENT SUIVANT UNE COLONNE).

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice carrée de taille n dont les coefficients sont notés $a_{i,j}$.

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \det(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$$

Exemple.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. On choisit de développer par rapport à la première colonne.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} &= 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (2 - 3) + (0 - 8) = -9 \end{aligned}$$

Théorème (DÉVELOPPEMENT SUIVANT UNE LIGNE).

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice carrée de taille n dont les coefficients sont notés $a_{i,j}$.

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \det(A) = \sum_{j=1}^n a_{i,j} (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$$

Exemple.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. On choisit de développer par rapport à la deuxième ligne.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} &= 0 \times (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 2(1 - 4) - (3 - 0) = -9 \end{aligned}$$

2.4 Inverse d'une matrice carrée : méthodes de calcul

2.4.1 Méthode 1

Théorème.

Si on transforme une matrice carrée A en Id à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes (resp. sur les colonnes) et qu'on applique ces mêmes opérations simultanément à la matrice Id , on obtient la matrice inverse de A , A^{-1} .

Remarque.

Il faut choisir au départ, soit lignes, soit colonnes, et ne plus changer après !

Exemple.

$$\begin{array}{lcl}
 A & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Id \\
 \\
 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \\
 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow 2L_3 - 3L_2 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \\
 \\
 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 9 & 12 & -8 \\ 2 & 4 & -2 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \\
 \\
 Id & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 & \begin{pmatrix} 9 & 12 & -8 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad A^{-1}
 \end{array}$$

2.4.2 Méthode 2

Définition (COMATRICE).

Soit A une matrice carrée.

On appelle *comatrice* de A , notée $Com(A)$, la matrice des cofacteurs de A .

Remarque.

Si on note $a_{i,j}$ le coefficient de A à la i -ème ligne et j -ème colonne, et $c_{i,j}$ le coefficient de $Com(A)$ à la i -ème ligne et j -ème colonne, on a :

$$c_{i,j} = \text{cofacteur de } a_{i,j} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$$

où $\Delta_{i,j}$ est le mineur de $a_{i,j}$.

Exemple.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$. Alors

$$Com(A) = \begin{pmatrix} 9 & 1 & -2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Théorème.

Soit A une matrice carrée inversible. Alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t Com(A)$$

Exemple.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$. Alors

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 9 & 12 & -8 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Chapitre 3

Polynômes

3.1 L'espace des polynômes

Définition (POLYNÔME, DEGRÉ, COEFFICIENT).

On appelle *polynôme* à coefficients réels (respectivement complexes) toute expression de la forme :

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 = \sum_{i=0}^n a_i X^i$$

où :

- $n \in \mathbb{N}$ est appelé *degré* de P et noté $\deg(P)$,
- $\forall i \in \{0, n\}$, $a_i \in \mathbb{R}$ (respectivement $a_i \in \mathbb{C}$),
- a_i est appelé *coefficient* de X^i .

Remarque. Un polynôme est donc une somme de puissances entières et positives de X

Définition (ENSEMBLE DES POLYNÔMES).

On note $\mathbb{R}[X]$ (resp. $\mathbb{C}[X]$) l'*ensemble des polynômes* à coefficients réels (resp. complexes).

Soit $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ (resp. $\mathbb{C}_n[X]$) l'*ensemble des polynômes* à coefficients réels (resp. complexes) de degré inférieur ou égal à n .

Exemples.

1. $P(X) = 2X^3 - 3X$ est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ et $\deg(P) = 3$
2. $Q(X) = iX^2 + 1 - i$ est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ et $\deg(Q) = 2$
3. $R(X) = \frac{1}{X} + \frac{2}{X^2} + 2$ n'est pas un polynôme.
4. $S(X) = \left(\sqrt{X}\right)^2 + 2\sqrt{X} - 1$ n'est pas un polynôme.

Théorème (PROPRIÉTÉS DU DEGRÉ).

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ (resp. $\mathbb{C}[X]$) non nuls.

1. $P \times Q \in \mathbb{R}[X]$ (resp. $P \times Q \in \mathbb{C}[X]$), $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda P \in \mathbb{R}[X]$ (resp. $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \lambda P \in \mathbb{C}[X]$), $\deg(\lambda P) = \deg(P) \Leftrightarrow \lambda \neq 0$.
3. $P + Q \in \mathbb{R}[X]$ (resp. $P + Q \in \mathbb{C}[X]$), $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$
avec égalité si $\deg(P) \neq \deg(Q)$.
4. $P \circ Q \in \mathbb{R}[X]$ (resp. $P \circ Q \in \mathbb{C}[X]$), $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$.

Exemples.

$$P(X) = X^2 + 1, \quad Q(X) = X^3, \quad R(X) = -X^2 + X$$

- ▷ $P \times Q(X) = X^5 + X^3$, $\deg(P \times Q) = 3 + 2 = 5$,
- ▷ $4P(X) = 4X^2 + 4$, $\deg(4P) = 2$,
- ▷ $P(X) + Q(X) = X^3 + X^2 + 1$, $\deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q)) = 3$,
- ▷ $P \circ Q(X) = (X^3)^2 + 1 = X^6 + 1$, $\deg(P \circ Q) = 3 \times 2 = 6$,
- ▷ $P(X) + R(X) = X + 1$, $\deg(P + R) = 1 \leq \max(\deg(P), \deg(R)) = 2$,

Théorème.

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ (ou $\mathbb{C}[X]$).

1. $\forall X \in \mathbb{R} : P(X) = 0 \Leftrightarrow$ tous les coefficients sont nuls
2. $\forall X \in \mathbb{R} : P(X) = Q(X) \Leftrightarrow \deg(P) = \deg(Q)$ et tous les coefficients de P et Q sont égaux 2 à 2

3.2 Racines d'un polynôme

Définition (RACINE).

Soit $a \in \mathbb{R}$ (resp. $a \in \mathbb{C}$) et soit $P \in \mathbb{R}[X]$ (resp. $P \in \mathbb{C}[X]$).

On dit que a est une *racine* de P si et seulement si $P(a) = 0$.

Exemples.

1. $P(X) = X^3 - 1 \in \mathbb{R}[X]$ admet 1 comme racine.
2. $Q(X) = X^2 + 1 \in \mathbb{C}[X]$ admet i comme racine.

Théorème.

Soit $a \in \mathbb{R}$ (resp. $a \in \mathbb{C}$) et soit $P \in \mathbb{R}[X]$ (resp. $P \in \mathbb{C}[X]$).

a est racine de P

$\Leftrightarrow$

$\exists Q \in \mathbb{R}[X]$ (resp. $Q \in \mathbb{C}[X]$) tel que $\deg(Q) = \deg(P) - 1$ et $P(X) = (X - a)Q(X)$

C'est à dire que a est racine de P si et seulement si on peut factoriser P par $(X - a)$.

Exemples.

1. Soit $P(X) = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

1 est une racine de P , on peut donc factoriser par $(X - 1)$.

$$P(X) = (X - 1)(X^2 - 5X + 6)$$

2 est une racine de P , on peut donc factoriser par $(X - 2)$.

$$P(X) = (X - 1)(X - 2)(X - 3)$$

2. Soit $Q(X) = 2iX^2 + (i + 1)X + 1 + i$. Factoriser Q dans $\mathbb{C}[X]$.

i est une racine de Q , on peut donc factoriser par $(X - i)$.

$$Q(X) = (X - i)(2iX - 1 + i)$$

Remarque.

- ▷ Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$, c'est trouver toutes les racines réelles de P et décomposer P en produit de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré 1 ou de degré 2 irréductibles.
- ▷ Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$, c'est trouver toutes les racines complexes de P et décomposer P en produit de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ de degré 1.

Théorème.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et soit $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (i.e. $a \in \mathbb{C}$ mais $a \notin \mathbb{R}$).

a est racine de $P \Leftrightarrow \bar{a}$ est racine de P

Remarque.

Il faut que P soit à coefficients réels.

Exemples.

1. $P(X) = 2X^3 + X^2 + 2X + 1$. On peut montrer que i et $-i$ sont racines de P

2. $Q(X) = iX^2 + (3 - i)X + (-1 - 2i)$, i est racine de Q mais $-i$ ne l'est pas.

Remarque.

Réciproquement, si les conjugués de toutes les racines de P sont également racines de P , alors $P \in \mathbb{R}[X]$ (il faut qu'au moins un des coefficients de P soit réel).

Définition (RACINE MULTIPLE, MULTIPLICITÉ).

Soit $a \in \mathbb{R}$ (resp. $a \in \mathbb{C}$) et soit $P \in \mathbb{R}[X]$ (resp. $P \in \mathbb{C}[X]$).

On dit que

a est une *racine multiple* de *multiplicité* $m \in \mathbb{N}^*$

si et seulement si

il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ (resp. $Q \in \mathbb{C}[X]$)
tel que $P(X) = (X - a)^m Q(X)$ avec $Q(a) \neq 0$.

Exemples.

1. $P(X) = X^2 + 4X + 4 = (X + 2)^2$,
-2 est une racine de multiplicité 2 de P (on dit aussi racine double de P).
2. $Q(X) = X^3 + 3X^2 + 3X + 1 = (X + 1)(X^2 + 2X + 1) = (X + 1)^3$,
-1 est une racine de multiplicité 3 de P .
3. $R(X) = X^3 + 3X^2 - 9X + 5 = (X - 1)(X^2 + 4X - 5) = (X - 1)^2(X + 5)$,
1 est une racine double et -5 est une racine simple de R .

Théorème.

Soit $a \in \mathbb{R}$ (resp. $a \in \mathbb{C}$) et soit $P \in \mathbb{R}[X]$ (resp. $P \in \mathbb{C}[X]$).

a est racine de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$ de $P \iff \forall k < m, P^{(k)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$

Remarque.

$P^{(k)}$ désigne la dérivée k -ième de P .

Si a est une racine de P' , a n'est pas forcément une racine de P ! Par exemple, si $P(X) = X^2 + 1$, $P'(X) = 2X$. On a alors $P'(0) = 0$ mais $P(0) \neq 0$.

Exemple.

Soit $P(X) = X^3 - 3X - 2$.

Comme $P(-1) = 0$ alors -1 est racine.

De plus, $P'(X) = 3X^2 - 3$, donc $P'(-1) = 0$ et -1 est racine de multiplicité au moins 2.

Enfin, $P''(X) = 6X$, donc $P''(-1) \neq 0$. Donc -1 n'est pas de multiplicité 3.

3.3 Division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$

Définition (DIVISION EUCLIDIENNE, QUOTIENT, RESTE).

Soient P et D deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$.

Faire la *division euclidienne* de P par D c'est trouver les polynômes Q et R tels que :

$$P(X) = Q(X) \times D(X) + R(X)$$

avec $\deg(R) < \deg(D)$. Le polynôme Q est appelé *quotient* et le polynôme R est appelé *reste*.

Méthode : Pour effectuer la division euclidienne d'un polynôme P par un polynôme D , et donc trouver les polynômes Q et R , il **faut** poser la division.

Exemples.

Faire la division euclidienne de $P(X) = X^2 + 3X + 2$ par $D(X) = X - 5$.

$$\begin{array}{r|l}
 X^2 + 3X + 2 & X - 5 \\
 - (X^2 - 5X) & \hline
 \hline
 8X + 2 & X + 8 \\
 - (8X - 40) & \\
 \hline
 42 &
 \end{array}$$

$\swarrow$
 $Q(X)$

$\swarrow$
 $R(X)$

Donc

$$P(X) = (X + 8)(X - 5) + 42$$

Remarque.

1. Les polynômes Q et R sont uniques.
2. Il faut au plus $\deg(P) - \deg(D) + 1$ étapes pour effectuer la division euclidienne de P par D .

Théorème.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et soit $a \in \mathbb{R}$.

le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)$ est nul $\Leftrightarrow a$ est racine de P

Exemples.

Faire la division euclidienne de $P(X) = X^3 + 4X^2 - 3X - 2$ par $D(X) = X - 1$.

$$\begin{array}{r|l}
 X^3 + 4X^2 - 3X - 2 & X - 1 \\
 - (X^3 - X^2) & \\
 \hline
 5X^2 - 3X - 2 & X^2 + 5X + 2 \\
 - (5X^2 - 5X) & \\
 \hline
 2X - 2 & \\
 - (2X - 2) & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

Donc

$$P(X) = (X^2 + 5X + 2)(X - 1)$$

et donc 1 est racine de P .

3.4 Décomposition en éléments simples (D.E.S.)

On s'intéresse aux fonctions rationnelles, c'est à dire aux fonctions de la forme :

$$f(X) = \frac{P(X)}{Q(X)} \quad \text{où } (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$$

Une telle fonction f est définie pour tout $X \in \mathbb{R}$ tel que $Q(X) \neq 0$.

Le but de cette décomposition, est de calculer des intégrales de fonctions rationnelles (dont on ne connaît pas de primitive) telles que $\int \frac{3X+1}{X^2+2X-3} dX$ ou $\int \frac{X^4}{X^3+3X^2+X-5} dX$.

3.4.1 Partie entière et partie fractionnaire

Théorème. Soit $f(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ une fonction rationnelle.

Il existe un unique couple $(E, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que,

$$f(X) = E(X) + \frac{R(X)}{Q(X)} \quad \text{avec } \deg(R) < \deg(Q)$$

▷ Le polynôme E est appelé partie entière de f .

▷ le quotient de polynômes $\frac{R}{Q}$ est appelé partie fractionnaire de f .

Méthode : Pour trouver la partie entière et la partie fractionnaire d'une fonction rationnelle

$f(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$, on fait la division euclidienne de P par Q .

Exemples.

Trouver la partie entière et la partie fractionnaire de $f(X) = \frac{X^4 - 3X + 2}{X^2 - 5X + 1}$.

1. On fait la division euclidienne de $P(X) = X^4 - 3X + 2$ par $Q(X) = X^2 - 5X + 1$.

En posant la division, on trouve :

$$X^4 - 3X + 2 = (X^2 + 5X + 24)(X^2 - 5X + 1) + (112X - 22)$$

2. On divise le résultat de la division euclidienne par Q .

On obtient alors :

$$\frac{X^4 - 3X + 2}{X^2 - 5X + 1} = X^2 + 5X + 24 + \frac{112X - 22}{X^2 - 5X + 1}$$

3. On a donc :

$$f(X) = X^2 + 5X + 25 + \frac{112X - 22}{X^2 - 5X + 1}$$

La partie entière E est facilement intégrable puisqu'il s'agit d'un polynôme. En revanche, ce n'est souvent pas le cas pour la partie fractionnaire. On cherche donc une manière de décomposer $\frac{R}{Q}$ pour pouvoir intégrer facilement.

Dans toute la suite, $f(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ avec $\deg(P) < \deg(Q)$.

L'idée de la D.E.S. est de transformer $f(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ avec $\deg(P) < \deg(Q)$ en une somme de fractions,

$$f(X) = \frac{P_1(X)}{Q_1(X)} + \frac{P_2(X)}{Q_2(X)} + \dots$$

où :

- ▷ $\deg(P_i) < \deg(Q_i)$
- ▷ $\deg(Q_i) = 1$ ou 2
- ▷ Q_i n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$

Exemples.

La D.E.S de $f(X) = \frac{X}{X^2 - 3X + 2}$ est

$$f(X) = \frac{-1}{X-1} + \frac{2}{X-2}$$

3.4.2 Cas de première espèce - racines simples

Supposons que Q est factorisable en produit de polynômes de la forme $(X - \alpha_i)$ tous distincts. Autrement dit :

$$Q(X) = \beta(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \cdots$$

alors il existe des constantes $a_1, a_2, \dots$ telles que :

$$Q(X) = \frac{a_1}{X - \alpha_1} + \frac{a_2}{X - \alpha_2} + \cdots \quad (3.1)$$

Exemples.

Soit $f(X) = \frac{X^2 - 3X + 5}{(X - 1)(X - 2)(X + 3)}$. La forme de la D.E.S est :

$$f(X) = \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{X - 2} + \frac{c}{X + 3}$$

Il faut donc trouver les constantes a, b et c .

Méthode 1 : Par identification (à éviter)

Après avoir décomposé f en somme d'éléments de la forme $\frac{a}{X - \alpha_i}$,

1. On réduit f au même dénominateur.
2. On développe le numérateur.
3. On identifie les coefficients.
4. On résout le système pour trouver les a_i .

Exemple 23 (suite - Méthode 1).

On sait que

$$f(X) = \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{X - 2} + \frac{c}{X + 3}$$

d'où en réduisant au même dénominateur, on obtient :

$$f(X) = \frac{a(X - 2)(X + 3) + b(X - 1)(X + 3) + c(X - 1)(X - 2)}{(X - 1)(X - 2)(X + 3)}$$

En développant le numérateur, on a :

$$f(X) = \frac{(a + b + c)X^2 + (a + 2b - 3c)X - 6a - 3b + 2c}{(X - 1)(X - 2)(X + 3)} = \frac{X^2 - 3X + 5}{(X - 1)(X - 2)(X + 3)}$$

Par identification, on obtient le système :

$$\begin{cases} a + b + c &= 1 \\ a + 2b - 3c &= -3 \\ -6a - 3b + 2c &= 5 \end{cases}$$

Finalement, en résolvant le système, on trouve :

$$\begin{cases} a &= \frac{-3}{4} \\ b &= \frac{3}{5} \\ c &= \frac{23}{20} \end{cases}$$

Méthode 2 :

Pour calculer a_i ,

1. On multiplie l'équation (3.1) par $(X - \alpha_i)$.
2. On remplace X par α_i .

Exemple 23 (suite - Méthode 2).

On sait que

$$f(X) = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2} + \frac{c}{X+3} = \frac{X^2 - 3X + 5}{(X-1)(X-2)(X+3)} \quad (3.2)$$

Pour trouver a , on multiplie l'expression (3.2) par $(X-1)$, on obtient :

$$a + \frac{b(X-1)}{X-2} + \frac{c(X-1)}{X+3} = \frac{X^2 - 3X + 5}{(X-2)(X+3)}$$

Puis on remplace X par 1, on a alors :

$$a = \frac{-3}{4}$$

De la même manière, pour trouver b on multiplie l'expression (3.2) par $(X-2)$,

$$\frac{a(X-2)}{X-1} + b + \frac{c(X-2)}{X+3} = \frac{X^2 - 3X + 5}{(X-1)(X+3)}$$

puis on remplace X par 2,

$$b = \frac{3}{5}$$

Et pour trouver c , on multiplie (3.2) par $(X+3)$,

$$\frac{a(X+3)}{X-1} + \frac{b(X+3)}{X-2} + c = \frac{X^2 - 3X + 5}{(X-1)(X-2)}$$

et on remplace X par -3 ,

$$c = \frac{23}{20}$$

Finalement,

$$f(X) = \frac{-3}{4} \times \frac{1}{X-1} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{X-2} + \frac{23}{20} \times \frac{1}{X+3}$$

3.4.3 Cas de première espèce - racines multiples

Supposons que Q est factorisable en produit de polynômes de la forme $(X - \alpha_i)$ et que Q possède une racine multiple. Autrement dit :

$$Q(X) = \beta(X - \alpha)^m(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \cdots$$

avec $m > 1$, alors il existe des constantes $a_{0,1}, a_{0,2}, a_{0,3}, \dots, a_1, a_2, \dots$ telles que :

$$Q(X) = \frac{a_{0,1}}{X - \alpha} + \frac{a_{0,2}}{(X - \alpha)^2} + \cdots + \frac{a_{0,m}}{(X - \alpha)^m} + \frac{a_1}{(X - \alpha_1)} + \frac{a_2}{(X - \alpha_2)} + \cdots \quad (3.3)$$

Exemples.

Soit $f(X) = \frac{2X}{(X - 2)^2(X + 1)}$. La forme de la D.E.S est :

$$f(X) = \frac{a}{X - 2} + \frac{b}{(X - 2)^2} + \frac{c}{X + 1}$$

Il faut donc trouver les constantes a , b et c .

Méthode :

1. On calcule c en utilisant la méthode 2 du paragraphe précédent.
2. On calcule b (la constante correspondant à la plus grande puissance) : on multiplie l'équation (3.3) par $(X - \alpha)^m$ puis on remplace X par α .
3. On calcule a (la constante correspondant à la plus petite puissance des éléments liés à la racine multiple). Pour cela, on multiplie l'équation (3.3) par X puis on fait tendre X vers $+\infty$.

Exemple 24 (suite).

On sait que

$$f(X) = \frac{a}{X - 2} + \frac{b}{(X - 2)^2} + \frac{c}{X + 1} = \frac{2X}{(X - 2)^2(X + 1)} \quad (3.4)$$

Pour trouver c , on multiplie l'expression (3.4) par $(X + 1)$, on obtient :

$$\frac{a(X + 1)}{X - 2} + \frac{b(X + 1)}{(X - 2)^2} + c = \frac{2X}{(X - 2)^2}$$

puis on remplace X par -1 ,

$$c = -\frac{2}{9}$$

Pour trouver b (coefficient de la plus grande puissance), on multiplie l'expression (3.4) par $(X - 2)^2$, on obtient :

$$a(X - 2) + b + \frac{c(X - 2)^2}{X + 1} = \frac{2X}{(X + 1)}$$

puis on remplace X par 2,

$$b = \frac{4}{3}$$

Pour trouver a (coefficient de la plus petite puissance), on multiplie l'expression (3.4) par X , on obtient :

$$\frac{aX}{X-2} + \frac{bX}{(X-2)^2} + \frac{cX}{X+1} = \frac{2X^2}{(X-2)^2(X+1)}$$

puis on fait tendre X vers $+\infty$.

$$\frac{aX}{X-2} + \frac{bX}{(X-2)^2} + \frac{cX}{X+1} = \frac{2X^2}{(X-2)^2(X+1)}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow_{X \rightarrow +\infty} & & \downarrow_{X \rightarrow +\infty} & & \downarrow_{X \rightarrow +\infty} & & \downarrow_{X \rightarrow +\infty} \\ a & + & 0 & + & c & = & 0 \end{array}$$

donc

$$a = -c = \frac{2}{9}$$

Finalement,

$$f(X) = \frac{2}{9} \times \frac{1}{X-2} + \frac{4}{3} \times \frac{1}{(X-2)^2} - \frac{2}{9} \times \frac{1}{X+1}$$

3.4.4 Cas de seconde espèce

Supposons que Q est factorisable sous la forme :

$$Q(X) = \beta(X^2 + \gamma_1 X + \gamma_2)(X - \alpha_1)$$

où $X^2 + \gamma_1 X + \gamma_2$ est un polynôme irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, alors il existe des constantes a_1 , a_2 et b_1 telles que :

$$Q(X) = \frac{aX + b}{X^2 + \gamma_1 X + \gamma_2} + \frac{c}{X - \alpha_1} \quad (3.5)$$

Exemples.

Soit $f(X) = \frac{3X+2}{(X^2+2X+2)(X+3)}$. La forme de la D.E.S est :

$$f(X) = \frac{aX+b}{X^2+2X+2} + \frac{c}{X+3}$$

Il faut donc trouver a , b , et c .

Méthode :

1. Pour trouver c , on utilise la méthode 2 présentée précédemment.
2. Pour trouver a , on multiplie l'équation (3.5) par X puis on fait tendre X vers $+\infty$.
3. Pour trouver b , on remplace X par 0 dans l'équation (3.5).

Exemple 25 (suite).

On sait que

$$f(X) = \frac{aX + b}{X^2 + 2X + 2} + \frac{c}{X + 3} = \frac{3X + 2}{(X^2 + 2X + 2)(X + 3)} \quad (3.6)$$

Pour trouver c , on multiplie l'expression (3.6) par $(X + 3)$, on obtient :

$$\frac{(aX + b)(X + 3)}{X^2 + 2X + 2} + c = \frac{3X + 2}{(X^2 + 2X + 2)}$$

puis on remplace X par -3 ,

$$c = \frac{-7}{5}$$

Pour trouver a , on multiplie l'expression (3.6) par X , on obtient :

$$\frac{(aX + b)X}{X^2 + 2X + 2} + \frac{cX}{X + 3} = \frac{(3X + 2)X}{(X^2 + 2X + 2)(X + 3)}$$

puis on fait tendre X vers $+\infty$,

$$\frac{(aX + b)X}{X^2 + 2X + 2} + \frac{cX}{X + 3} = \frac{(3X + 2)X}{(X^2 + 2X + 2)(X + 3)}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow_{X \rightarrow +\infty} & \downarrow_{X \rightarrow +\infty} & \downarrow_{X \rightarrow +\infty} \\ a & + & c = 0 \end{array}$$

donc

$$a = -c = \frac{7}{5}$$

Pour trouver b , on remplace X par 0 dans l'expression (3.6),

$$\frac{b}{2} + \frac{c}{3} = \frac{b}{2} - \frac{7}{15} = \frac{2}{6}$$

donc

$$b = 2 \times \left(\frac{2}{6} + \frac{7}{15} \right) = 2 \times \left(\frac{10}{30} + \frac{14}{30} \right) = \frac{24}{15}$$

Finalement,

$$f(X) = \frac{3}{15} \times \frac{7X + 8}{X^2 + 2X + 2} - \frac{7}{5} \times \frac{1}{X + 3}$$

Remarque.

On peut aussi travailler dans $\mathbb{C}$ et se ramener à un cas de première espèce.

Exemples.

Soit $f(X) = \frac{X}{(X^2 + 1)(X - 1)}$. Dans $\mathbb{C}$, on a :

$$X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$$

d'où :

$$f(X) = \frac{X}{(X - i)(X + i)(X - 1)}$$

Il s'agit d'un cas de première espèce d'ordre 1, la forme de la D.E.S de f dans $\mathbb{C}$ est donc :

$$f(X) = \frac{a}{X - i} + \frac{b}{X + i} + \frac{c}{X - 1} = \frac{X}{(X - i)(X + i)(X - 1)} \quad (3.7)$$

où a , b et c peuvent être dans $\mathbb{C}$.

On utilise la méthode 2 pour déterminer a , b et c . En multipliant (3.7) par $(X - i)$ et en remplaçant X par i , on trouve :

$$a = \frac{i}{2i(i - 1)} = \frac{1}{2(i - 1)}$$

En multipliant (3.7) par $(X + i)$ et en remplaçant X par $-i$, on trouve :

$$b = \frac{-i}{2i(i + 1)} = \frac{-1}{2(i + 1)}$$

En multipliant (3.7) par $(X - 1)$ et en remplaçant X par 1, on trouve :

$$c = \frac{1}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{1}{2}$$

On a alors :

$$f(X) = \frac{1}{2(i - 1)(X - i)} - \frac{1}{2(i + 1)(X + i)} + \frac{1}{2(X - 1)}$$

Finalement, pour trouver la D.E.S de f dans $\mathbb{R}$, on regroupe les termes complexes. On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2(i - 1)(X - i)} - \frac{1}{2(i + 1)(X + i)} &= \frac{(i + 1)(X + i) - (i - 1)(X - i)}{2(i - 1)(i + 1)(X + i)(X - i)} \\ &= \frac{iX - 1 + X + i - iX - 1 + X - i}{-4(X^2 + 1)} \\ &= \frac{2X - 2}{-4(X^2 + 1)} \\ &= \frac{1 - X}{2(X^2 + 1)} \end{aligned}$$

donc

$$f(X) = \frac{1 - X}{2(X^2 + 1)} + \frac{1}{2(X - 1)}$$

3.4.5 Application au calcul d'intégrales

Calculer l'intégrale

$$I = \int_{-1}^0 \frac{X^4 + 3X^3 - 2}{X^2 + 2X - 3} dX$$

Pour trouver une primitive de $f(X) = \frac{X^4 + 3X^3 - 2}{X^2 + 2X - 3}$, on cherche la décomposition en élément simple de f .

Pour cela, on commence par déterminer la partie entière et la partie fractionnaire de f .

En effectuant la division euclidienne de $(X^4 + 3X^3 - 2)$ par $(X^2 + 2X - 3)$, on trouve :

$$X^4 + 3X^3 - 2 = (X^2 + 2X - 3)(X^2 + X + 1) + X + 1$$

d'où :

$$f(X) = X^2 + X + 1 + \frac{X + 1}{X^2 + 2X - 3}$$

On cherche maintenant la D.E.S de la partie fractionnaire $\frac{X + 1}{X^2 + 2X - 3}$.

Comme $X^2 + 2X - 3 = (X - 1)(X + 3)$, il s'agit d'un cas de première espèce d'ordre 1, la D.E.S est donc de la forme :

$$\frac{X + 1}{X^2 + 2X - 3} = \frac{X + 1}{(X - 1)(X + 3)} = \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{X + 3} \quad (3.8)$$

Pour trouver a , on multiplie l'expression (3.8) par $(X - 1)$, puis on remplace X par 1. On trouve :

$$a = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Pour trouver b , on multiplie l'expression (3.8) par $(X + 3)$, puis on remplace X par -3 . On trouve :

$$b = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

Finalement, on a :

$$f(X) = X^2 + X + 1 + \frac{1}{2(X - 1)} + \frac{1}{2(X + 3)}$$

On peut maintenant intégrer f .

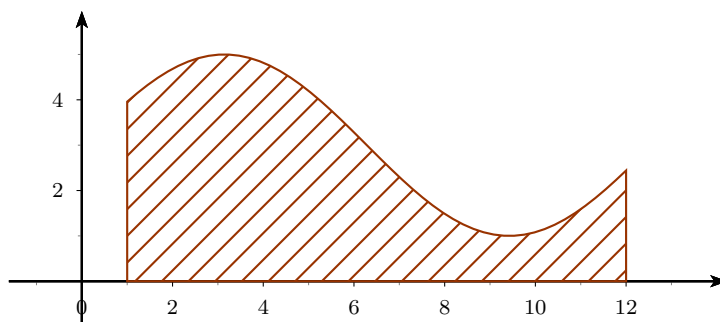
$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^0 f(X) dX = \int_{-1}^0 \left(X^2 + X + 1 + \frac{1}{2(X-1)} + \frac{1}{2(X+3)} \right) dX \\ &= \int_{-1}^0 X^2 dX + \int_{-1}^0 X dX + \int_{-1}^0 1 dX + \frac{1}{2} \int_{-1}^0 \frac{1}{X-1} dX + \frac{1}{2} \int_{-1}^0 \frac{1}{X+3} dX \\ &= \left[\frac{X^3}{3} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{X^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[X \right]_{-1}^0 + \frac{1}{2} \left[\ln(|X-1|) \right]_{-1}^0 + \frac{1}{2} \left[\ln(|X+3|) \right]_{-1}^0 \\ &= 0 - \frac{-1}{3} + 0 - \frac{1}{2} + 0 - (-1) + \frac{1}{2}(\ln(1) - \ln(2)) + \frac{1}{2}(\ln(3) - \ln(2)) \\ &= \frac{5}{6} + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

Chapitre 4

Intégrale d'une fonction

4.1 Point de vue graphique : lien entre aire et intégrale

Définition (Domaine associé). On appelle domaine associé à une fonction f sur $[a, b]$, le domaine $\mathcal{E}$ délimité par $\mathcal{C}_f$ (courbe de f), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.



Définition (Cas d'une fonction positive). Soit f une fonction positive sur $[a, b]$ (avec $a \leq b$). On appelle intégrale de f sur $[a, b]$ la valeur de l'aire du domaine associé à f sur $[a, b]$. On note cette valeur :

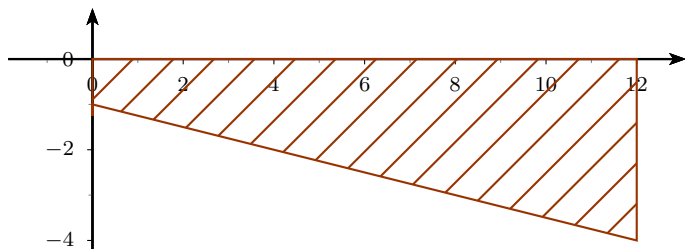
$$\int_a^b f(t)dt$$

Exemple. $\int_1^5 2dt = 4 \times 2 = 8$, c'est la surface d'un rectangle de largeur 2 et de longueur 4.

Définition (Cas d'une fonction négative). Soit f une fonction négative sur $[a, b]$ (avec $a \leq b$). On appelle intégrale de f sur $[a, b]$ l'opposée de la valeur de l'aire du domaine associé à f sur $[a, b]$. On note cette valeur :

$$\int_a^b f(t)dt$$

Exemple. $\int_0^{12} -\frac{1}{4}t - 1 dt = -\left(12 + \frac{12 \times 3}{2}\right) = -30$, c'est la surface d'un trapèze.

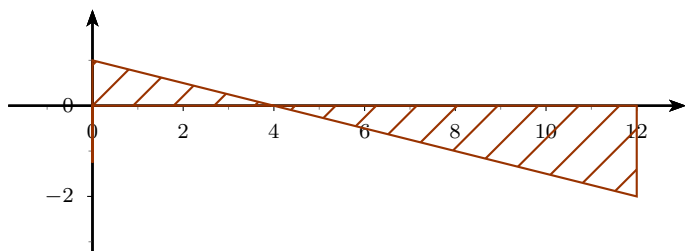


Théorème. *Relation de Chasles*

Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$ et soit $a \leq c \leq b$. Alors :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Exemple. $\int_0^{12} -\frac{1}{4}t + 1 dt = \int_0^4 -\frac{1}{4}t + 1 dt + \int_4^{12} -\frac{1}{4}t + 1 dt = \frac{4 \times 1}{2} - \frac{8 \times 2}{2} = -4$



4.1.1 Propriétés graphiques de l'intégrale

Inégalité

Théorème. Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$.

Si $f(t) \leq g(t)$ sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$$

Parité

Remarque. Soit $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- Si $f(-x) = f(x)$ alors f est paire. Graphiquement, la courbe de f est symétrique par rapport à l'axe (Oy).
- Si $f(-x) = -f(x)$ alors f est impaire. Graphiquement, la courbe de f est symétrique par rapport à l'origine.

Exemple.

- Les fonctions $\cos(x)$ et x^2 sont paires. Plus généralement, x^{2p} avec $p \in \mathbb{N}$ est paire.
- Les fonctions $\sin(x)$ et x sont impaires. Plus généralement, x^{2p+1} avec $p \in \mathbb{N}$ est impaire.

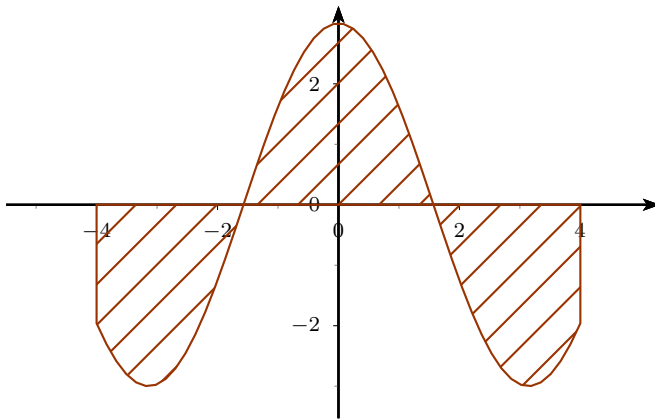
Théorème. Soit f une fonction intégrable sur $[-a, a]$ ($a \in \mathbb{R}^+$). Alors :

- Si f est paire :

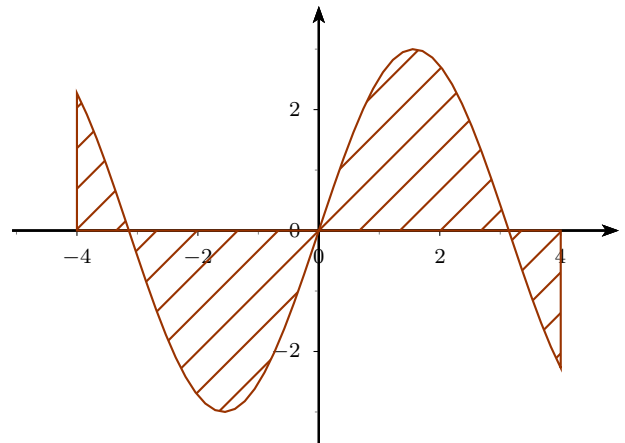
$$\int_{-a}^a f(t)dt = 2 \int_0^a f(t)dt$$

- Si f est impaire :

$$\int_{-a}^a f(t)dt = 0$$



Intégrale d'une fonction paire



Intégrale d'une fonction impaire

ATTENTION : Il faut bien vérifier que l'intervalle d'intégration est symétrique par rapport à 0 sinon cela ne fonctionne pas !

Exemple.

- $\int_{-1}^1 \frac{t}{1+t^2} dt =$
- $\int_{-\pi\sqrt{3}}^{\pi\sqrt{3}} 123x^9 + 38x^5 + 1024x^3 + x dx =$

ATTENTION : Il faut y penser ! Utiliser la parité simplifie en général grandement les calculs !

Périodicité

Remarque. Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On rappelle qu'une fonction est périodique de période T si pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f(t+T) = f(t)$$

On dit également que f est T -périodique.

Exemple. Les fonctions $\cos(x)$ et $\sin(x)$ sont toutes deux périodiques de période 2π .

Théorème. Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, périodique de période T et $a \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$$

Autrement dit, l'intégrale $\int_a^{a+T} f(t)dt$ est indépendante de a . On la note alors $\int_{[T]} f(t)dt$.

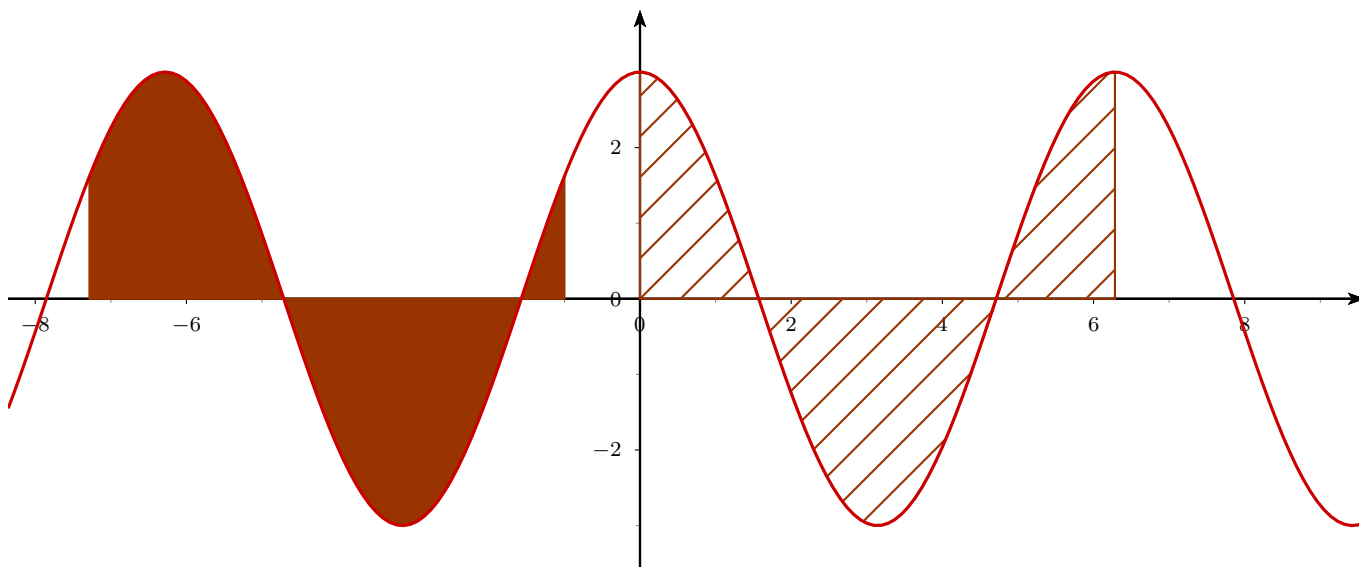


FIGURE 4.1 – Intégrale d'une fonction périodique

4.2 Méthodes de calcul intégral

La 1ère méthode à utiliser est le calcul de surface : si la fonction est constante ou si elle est impaire sur un intervalle symétrique, par exemple.

4.2.1 Méthode 2 : Calcul de primitive

Soit $D \subset \mathbb{R}$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique définie sur D .

Définition. Une fonction $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de f dans D si et seulement si

- F est dérivable sur D ,
- $F' = f$ dans D .

Théorème. Si F et G sont deux primitives de f , alors $F - G$ est une constante sur tout intervalle $I \subset D$.

Théorème. Toute fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ possède une primitive F .

Théorème. Soit f une fonction continue (ou continue par morceaux) sur un intervalle $[a, b]$. On

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive quelconque de f sur $[a, b]$.

Remarque. On utilisera la notation suivante : $F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b$.

Autrement dit :

$$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b$$

où F est une primitive quelconque de f sur $[a, b]$.

ATTENTION : Dans l'écriture $\int_a^b f(t)dt$, on peut remplacer la lettre « t » par n'importe quelle autre lettre ou symbole (autre que a et b évidemment) et écrire $\int_a^b f(x)dx$ ou $\int_a^b f(u)du...$ au lieu de $\int_a^b f(t)dt$: il s'agit d'une variable muette.

ATTENTION : le « dt » apporte une information importante : il précise par rapport à quelle variable on effectue l'intégration !

Remarque. Le choix de la primitive est libre : si F et G sont deux primitives de f sur $[a, b]$, elles diffèrent d'une constante et alors $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$.

Théorème (Propriétés immédiates). Ces propriétés découlent immédiatement du théorème précédent.

- $\int_a^a f(t)dt = 0$
- $\int_a^b (f(t) + g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$ (linéarité)
- $\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt$
- $\int_a^b f(t)dt = - \int_b^a f(t)dt$ (inversion des bornes)
- $\int_a^b k dt = k(b - a)$ (k étant un réel quelconque)

En particulier, $\int_a^b dt = b - a$ (on écrit $\int_a^b dt$ et pas $\int_a^b 1 dt$).

Le tableau suivant regroupe les primitives classiques à connaître !

$f(t)$	$F(t)$	$f(t)$	$F(t)$
$t^n \ (n \in \mathbb{N})$		$u'(t)(u(t))^n \ (n \in \mathbb{N})$	
$\frac{1}{t}$		$\frac{u'(t)}{u(t)}$	
$\frac{1}{t^n} \ (n \in \mathbb{N}, n \neq 1)$		$\frac{u'(t)}{(u(t))^n} \ (n \in \mathbb{N}, n \neq 1)$	
$\frac{1}{\sqrt{t}}$		$\frac{u'(t)}{\sqrt{u(t)}}$	
$t^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1)$		$u'(t)(u(t))^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1)$	
$\cos(t)$		$u'(t) \cos(u(t))$	
$\sin(t)$		$u'(t) \sin(u(t))$	
e^t		$u'(t)e^{u(t)}$	
$\frac{1}{1+t^2}$		$\frac{u'(t)}{1+(u(t))^2}$	

Primitives classiques

Exemple.

$$\bullet \int_0^1 t^5 dt =$$

$$\bullet \int_0^1 e^t dt =$$

$$\bullet \int_1^e \frac{dt}{t} =$$

$$\bullet \int_1^2 \frac{t}{t^2 + 3} dt =$$

$$\bullet \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 3 \cos(2t) dt =$$

$$\bullet \int_2^4 e^{t/2} dt =$$

4.2.2 Méthode 3.1 : Fractions rationnelles et D.E.S.

But : Calculer les intégrales de fonctions du type : $\int \frac{P}{Q}$

- **Reconnaître** $\frac{P'(x)}{P^n(x)}$ avec P un polynôme ($n \in \mathbb{N}$)

Cette méthode peut s'appliquer lorsqu'on a un quotient de polynômes du type $\frac{Q}{P^n}$ et que $\deg(Q) = \deg(P) - 1$. Il faut essayer de faire apparaître P' au numérateur.

Exemple. Calculer :

1. $\int_2^3 \frac{2}{2x-3} dx =$
2. $\int_1^2 \frac{x^2+2}{x^3+6x} dx =$
3. $\int_1^2 \frac{x+1}{(x^2+2x)^2} dx =$

- **Reconnaître** $\frac{P'(x)}{1+P^2(x)}$ avec P un polynôme

rem Une primitive de $\frac{P'(x)}{1+P^2(x)}$ est $\arctan(P(x))$.

On utilise en particulier cette technique pour calculer les intégrales de fonctions du type

$$\frac{1}{ax^2 + bx + c} \text{ avec } \Delta = b^2 - 4ac < 0$$

Pour cela, on écrit $ax^2 + bx + c$ sous forme canonique.

Exemple. Calculer :

1. $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx =$
2. $\int_0^1 \frac{2}{4x^2+1} dx =$
3. $\int_0^1 \frac{1}{x^2-2x+2} dx =$

Le Cas général : Décomposition en éléments simples

Pour calculer les intégrales du type $\frac{P(x)}{Q(x)}$ avec P et Q deux polynômes.

ATTENTION : Commencer par vérifier si on connaît une primitive de ces fonctions !

• Méthode :

On effectue la décomposition en éléments simples de $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Exemple. Calculer :

1. $\int_2^3 \frac{2}{x^2-1} dx =$

2. $\int_2^3 \frac{x+1}{x-1} dx =$

3. $\int_3^4 \frac{x+2}{x^3-4x^2+4x} dx =$

Pour résumer, la DES conduit à intégrer 4 types d'éléments simples :

1er type : la partie entière. C'est un polynôme !

2ème type : $\frac{1}{t+\alpha}$ qui s'intègre en $\ln |t + \alpha|$

3ème type : $\frac{1}{(t+\alpha)^n}$ (avec $n > 1$) qui s'intègre en $\frac{1}{1-n} \left(\frac{1}{t+\alpha}\right)^{n-1}$

4ème type : $\frac{At+B}{at^2+bt+c}$ (avec $\Delta = b^2 - 4ac < 0$). On sépare la fonction en deux parties de manière à faire apparaître $\frac{u'(t)}{u(t)}$ d'une part et $\frac{u'(t)}{(u(t))^2+1}$ d'autre part.

4.2.3 Méthode 3.2 : Fonction « polynômiale » en sinus et cosinus

But : Calculer les intégrales de fonctions du type :

1. $\cos^n(x) \sin^m(x)$

3. $\cos^n(x) \sin(\beta x)$

2. $\cos(\alpha x) \sin(\beta x)$

4. $\cos(\alpha x) \sin^m(x)$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(n, m) \in \mathbb{N}^2$

ATTENTION : Commencer par vérifier si on connaît une primitive de ces fonctions !

Exemple. Calculer

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x) \sin^2(2x) dx =$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(3x) \cos^4(3x) dx =$

• **Méthode :**

Si aucune formule de primitive ne convient, alors on **linéarise** en utilisant, par exemple, les formules d'Euler :

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Exemple. Calculer

1. $I = \int_0^{\pi} \sin(4x) \cos(5x) dx$. On pose $f(x) = \sin(4x) \cos(5x)$. On linéarise

$$\begin{aligned} \sin(4x) \cos(5x) &= \frac{e^{i4x} - e^{-i4x}}{2i} \times \frac{e^{i5x} + e^{-i5x}}{2} \\ &= \frac{1}{4i} (e^{i9x} - e^{-i9x} - e^{ix} + e^{-ix}) \\ &= \frac{1}{4i} (2i \sin(9x) - 2i \sin(x)) = \frac{1}{2} (\sin(9x) - \sin(x)) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin(4x) \cos(5x) dx &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (\sin(9x) - \sin(x)) \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{9} \cos(9x) + \cos(x) \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{9} \cos(9\pi) + \cos(\pi) + \frac{1}{9} \cos(0) - \cos(0) \right) \\ &= \frac{1}{9} - 1 = -\frac{8}{9} \end{aligned}$$

2. $\int_0^{\pi} \cos^2(x) \sin(2x) dx =$

3. $\int_0^{\pi} \cos^2(x) \sin^2(x) dx =$

4.2.4 Méthode 4 : Intégration par parties (IPP)

Théorème (Formule d'intégration par parties). Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a, b]$ telles que leurs dérivées sont continues sur $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

ATTENTION : Il faut bien choisir quelle fonction on intègre et quelle fonction on dérive de façon à se ramener à une intégrale plus simple !

Exemple. Calculer :

1. $I = \int_0^1 e^{-3t}(2t+1)dt$.
On pose $u(t) = 2t+1$ et $v'(t) = e^{-3t}$.
On calcule alors que $u'(t) = 2$ et $v(t) = \frac{-1}{3}e^{-3t}$.
Donc, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 e^{-3t}(2t+1)dt \\ &= \left[(2t+1) \times \frac{-1}{3}e^{-3t} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-1}{3}e^{-3t} \times 2dt \\ &= \left[(2t+1) \times \frac{-1}{3}e^{-3t} \right]_0^1 - \left[\frac{2}{9}e^{-3t} \right]_0^1 \\ &= -e^{-3} + \frac{1}{3} - \frac{2}{9}e^{-3} + \frac{2}{9} = -\frac{11}{9}e^{-3} + \frac{5}{9} \end{aligned}$$

2. $\int_0^\pi (3-2x) \cos(3x)dx$

3. $\int_1^e (1-4t) \ln(3t)dt$

4. $\int_0^1 \arctan(t)dt$

Remarque. Il existe un moyen mnémotechnique pour choisir quelle fonction intégrer et quelle fonction dériver :

Arctan Log Poly Exp Sin

On dérive la fonction la plus à gauche.

Remarque. On peut également utiliser l'intégration par parties pour diminuer le degré des dénominateurs des fractions rationnelles.

Exemple. Calculer $\int_2^3 \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx = \int_2^3 x \times \frac{x}{(x^2+1)^2}dx$

4.2.5 Méthode 5 : Changement de variable

Théorème (Formule de changement de variable). Soit f une fonction continue et φ une fonction bijective dérivable sur un intervalle $[a, b]$ telles φ' est continue sur $[a, b]$. On pose $x = \varphi(t)$. On a alors, par changement de variable :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Remarque : Analysons la formule du théorème ci-dessus. On peut observer les 3 éléments qui forment une intégrale : les bornes, la fonction et le dt :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

- Les bornes : comme t varie de a à b , et que $x = \varphi(t)$, nécessairement x varie de $\varphi(a)$ à $\varphi(b)$.
- la relation entre dt et dx : comme $x = \varphi(t)$, on peut considérer la variable x comme étant une fonction de t et ainsi dériver x par rapport à t :

$$x = \varphi(t) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \varphi'(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t)dt$$

- La fonction : comme $x = \varphi(t)$, nécessairement $f(x) = f(\varphi(t))$.

Exemple. Calculons : $I = \int_4^9 \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx$ en posant le changement de variable $t = \sqrt{x}$.

- Les bornes : comme x varie de 4 à 9, et que $t = \sqrt{x}$, alors t varie de $\sqrt{4} = 2$ à $\sqrt{9} = 3$.
- la relation entre dt et dx : comme $t = \sqrt{x}$, on a $t = \sqrt{x} \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$.
Qu'on peut aussi écrire : $dx = 2t dt$

- La fonction : On remplace $\frac{1}{1 + \sqrt{x}}$ par $\frac{1}{1 + t}$.

Ainsi, par changement de variable :

$$I = \int_4^9 \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx = \int_2^3 \frac{1}{1 + t} 2t dt = \int_2^3 \frac{2t}{1 + t} dt$$

Il suffit alors de calculer la nouvelle intégrale :

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{2t}{1 + t} dt &= \int_2^3 2 + \frac{-2}{1 + t} dt \quad \text{par division euclidienne} \\ &= [2t - 2 \ln |1 + t|]_2^3 \\ &= 2 - 2 \ln(4) + 2 \ln(3) \end{aligned}$$

Chapitre 5

Intégrale généralisée (ou intégrale impropre)

5.1 Notion d'intégrale généralisée

Nous savons intégrer des fonctions continues (par morceaux) sur des intervalles bornés du type $[a, b]$; Mais comment définir l'intégrale lorsque :

- l'une des bornes est infinie ? Par exemple $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$.
- la fonction n'admet pas de limite finie en une borne ? Par exemple $\int_0^1 \ln(x) dx$.

Vocabulaire :

• On parle d'**intégrale généralisée**, ou d'**intégrale impropre**, lorsqu'on a au moins un des cas suivant : une borne est infinie ou la fonction tend vers l'infini lorsque la variable tend vers une des bornes.

Définition.

Soit $f :]a, b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue (par morceaux) sur $]a, b]$ avec $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$.

- Si $\lim_{X \rightarrow a^+} \int_X^b f(t) dt$ existe et est finie, alors on dit que $\int_a^b f(t) dt$ **converge**.
- Si $\lim_{X \rightarrow a^+} \int_X^b f(t) dt$ n'existe pas ou est infinie, alors on dit que $\int_a^b f(t) dt$ **diverge**.

Exemple. Etudions la nature de $\int_0^1 \frac{1}{t} \ln(t) dt$.

Soit $\varepsilon > 0$. Calculons $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{t} \ln(t) dt$.

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{t} \ln(t) dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} (\ln(t))^2 \right]_{\varepsilon}^1 \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} (\ln(1))^2 - \frac{1}{2} (\ln(\varepsilon))^2 \\ &= -\infty \end{aligned}$$

Donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t} \ln(t) dt$ diverge.

Définition.

Soit $f : [a, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue (par morceaux) sur $[a, +\infty[$.

- Si $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_a^X f(t)dt$ existe et est finie, alors on dit que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ **converge**.
- Si $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_a^X f(t)dt$ n'existe pas ou est infinie, alors on dit que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ **diverge**.

Vocabulaire :

- Si on cherche à savoir si une intégrale généralisée converge ou diverge, on dit qu'on étudie sa nature.

Exemples.

1. Etudions la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$.

Soit $X > 1$. Calculons $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_1^X \frac{1}{\sqrt{x}} dx$.

$$\begin{aligned} \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_1^X \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{X \rightarrow +\infty} [2\sqrt{x}]_1^X \\ &= \lim_{X \rightarrow +\infty} 2\sqrt{X} - 2 \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Comme la limite est infinie, on peut dire que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ diverge.

2. Etudions la nature de $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$.

Soit $X > 1$. Calculons $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_1^X e^{-x} dx$.

$$\begin{aligned} \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_1^X e^{-x} dx &= \lim_{X \rightarrow +\infty} [-e^{-x}]_1^X \\ &= \lim_{X \rightarrow +\infty} -e^{-X} + e^{-1} \\ &= e^{-1} \end{aligned}$$

Comme la limite est finie, on peut dire que l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ converge (vers e^{-1}).

ATTENTION :

$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$ n'est pas suffisant pour montrer que l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge !

Remarque. On peut donner la même définition que précédemment pour l'intégrale $\int_{-\infty}^a f(t) dt$

5.2 Critères de convergence

Théorème (Critère de Riemann). Soit $a > 0$.

1. L'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ est convergente si $\alpha > 1$ et divergente si $\alpha \leq 1$
2. L'intégrale $\int_0^a \frac{1}{t^\alpha} dt$ est convergente si $\alpha < 1$ et divergente si $\alpha \geq 1$

Démonstration. du cas 1.

- Supposons $\alpha \neq 1$. Une primitive de $\frac{1}{t^\alpha} = t^{-\alpha}$ est $\frac{1}{1-\alpha} t^{1-\alpha}$. On a donc

$$\int_a^X \frac{1}{t^\alpha} dt = \left[\frac{1}{1-\alpha} t^{1-\alpha} \right]_a^X = \frac{1}{1-\alpha} X^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} a^{1-\alpha}$$

Or

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1-\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{si } 1-\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha < 1 \\ 0 & \text{si } 1-\alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha > 1 \end{cases}$$

d'où le résultat lorsque $\alpha \neq 1$.

- Supposons maintenant que $\alpha = 1$. Nous avons

$$\int_a^X \frac{1}{t} dt = [\ln(t)]_a^X = \ln(X) - \ln(a)$$

Or $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(t) = +\infty$ d'où le fait que $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ diverge. □

Exemples.

1. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ est divergente.
2. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est convergente.
3. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ est divergente.
4. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ est convergente.

Théorème (Critère de comparaison).

Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ (b pouvant être $+\infty$) deux fonctions continues (par morceaux).

On suppose que $\forall t \in [a, b[: 0 \leq f(t) \leq g(t)$

1. $\int_a^b g(t) dt$ est convergente $\Rightarrow \int_a^b f(t) dt$ est convergente.
2. $\int_a^b f(t) dt$ est divergente $\Rightarrow \int_a^b g(t) dt$ est divergente.

Exemple. Etudier la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t^2} dt$

Pour tout $t \geq 0$ on a $0 < \frac{e^{-t}}{1+t^2} < \frac{1}{1+t^2} < \frac{1}{t^2}$.

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge d'après le critère de Riemann.

Donc, par comparaison, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t^2} dt$ converge aussi.

Fonctions équivalentes

Définition. Soient f et g deux fonctions.

On dit que f est équivalente à g quand x tend vers a (avec a qui peut être $+\infty$ ou $-\infty$) si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Cette propriété se note $f \underset{a}{\sim} g$.

Exemple.

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{3t+2}{2t^3-3t+5} \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{2t^2}$$

$$\sin(x) \underset{0}{\sim} x$$

$$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$$

ATTENTION : On ne peut pas additionner des équivalents!!

Cependant, les équivalents sont stables par produit et par quotient.

Théorème (Critère d'équivalence).

Soit $f : [a, b[\mapsto \mathbb{R}$ et $g : [a, b[\mapsto \mathbb{R}$ (b pouvant être $+\infty$) deux fonctions continues (par morceaux).

On suppose que $f \underset{b}{\sim} g$

1. $\int_a^b g(t)dt$ est convergente $\Leftrightarrow \int_a^b f(t)dt$ est convergente.
2. $\int_a^b g(t)dt$ est divergente $\Leftrightarrow \int_a^b f(t)dt$ est divergente.

Exemple. Etudier la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{t^2+3}{t^4-3t+1} dt$.

On a $\frac{t^2+3}{t^4-3t+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{t^2}{t^4} = \frac{1}{t^2}$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge d'après le critère de Riemann.

Donc, par équivalence, $\int_1^{+\infty} \frac{t^2+3}{t^4-3t+1} dt$ converge aussi.

Chapitre 6

Transformée de Laplace

6.1 Signaux causaux

Définition (FONCTION CAUSALE).

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On dit que f est *causale* si et seulement si

$$\forall x < 0, \quad f(x) = 0.$$

Exemple. On note $\mathcal{U}$ la fonction de Heaviside ou fonction échelon, définie sur $\mathbb{R}$ par :

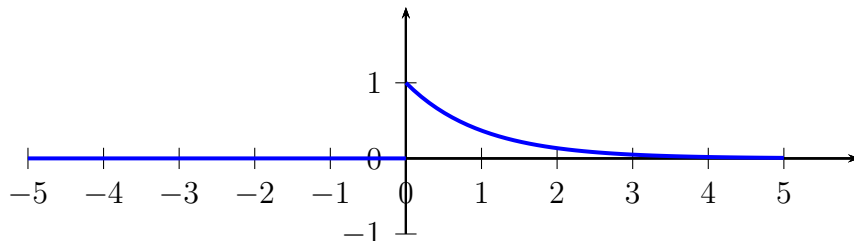
$$\mathcal{U}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

$\mathcal{U}$ est une fonction causale.

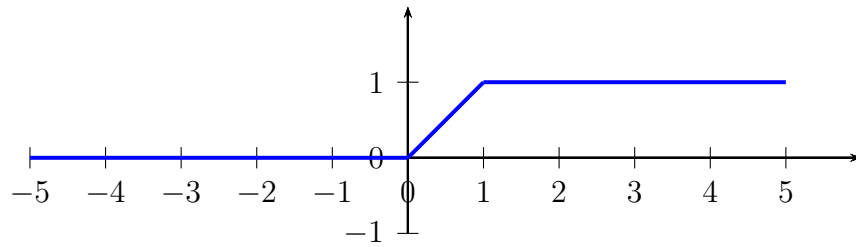
Remarque. Pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$, la fonction g définie par $g(t) = f(t) \times \mathcal{U}(t)$ est causale.

Exemple.

1. $f(t) = e^{-t}\mathcal{U}(t)$ est causale.



2. $f(t) = t\mathcal{U}(t) - (t - 1)\mathcal{U}(t - 1)$ est causale.



6.2 La transformée de Laplace

Définition (TRANSFORMÉE DE LAPLACE).

Soit f une fonction causale. On appelle *transformée de Laplace* de f , la fonction notée $\mathcal{L}_f$ ou $\mathcal{L}(f)$ définie par :

$$\mathcal{L}_f(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt.$$

$\mathcal{L}_f$ est définie pour tout $p \in \mathbb{C}$ tel que l'intégrale converge.

Remarque. Pour que $\mathcal{L}_f$ soit définie, il faut que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)e^{-pt} = 0$ (mais ce n'est pas toujours suffisant...)

Exemples (A connaître!).

1. Soit $f(t) = \mathcal{U}(t)$, alors $\mathcal{L}_f(p) = \frac{1}{p}$ et $D_{\mathcal{L}} = \{p \in \mathbb{C} \text{ tel que } \operatorname{Re}(p) > 0\}$.

Démonstration :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f(p) &= \int_0^{+\infty} \mathcal{U}(t)e^{-pt} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt \\ &= \left[\frac{e^{-pt}}{-p} \right]_0^{+\infty} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-pt}}{-p} - \frac{1}{-p} \\ &= \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Pour passer de l'avant dernière à la dernière ligne, on suppose que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-pt}}{-p} = 0$. Ce qui n'est pas évident...

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-pt}}{-p} = 0 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \left| \frac{e^{-pt}}{-p} \right| = 0 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\operatorname{Re}(p)t}}{p} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(p) > 0.$$

et donc $D_{\mathcal{L}} = \{p \in \mathbb{C} \text{ tel que } \operatorname{Re}(p) > 0\}$.

2. Soit $f(t) = t\mathcal{U}(t)$, alors $\mathcal{L}_f(p) = \frac{1}{p^2}$ et $D_{\mathcal{L}} = \{p \in \mathbb{C} \text{ tel que } \operatorname{Re}(p) > 0\}$.

Démonstration :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_f(p) &= \int_0^{+\infty} t\mathcal{U}(t)e^{-pt} dt \\ &= \int_0^{+\infty} te^{-pt} dt \\ &= \left[t \frac{e^{-pt}}{-p} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-pt}}{-p} \\ &= \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt \\ &= \frac{1}{p^2}\end{aligned}$$

De la même manière que pour l'exemple 1, on montre que $D_{\mathcal{L}} = \{p \in \mathbb{C} \text{ tel que } \operatorname{Re}(p) > 0\}$.

3. Soit $f(t) = e^{-at}\mathcal{U}(t)$ où $a \in \mathbb{C}$, alors $\mathcal{L}_f(p) = \frac{1}{p+a}$ et $D_{\mathcal{L}} = \{p \in \mathbb{C} \text{ tel que } \operatorname{Re}(p) > -\operatorname{Re}(a)\}$.

Démonstration :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_f(p) &= \int_0^{+\infty} e^{-at}\mathcal{U}(t)e^{-pt} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t} dt \\ &= \frac{1}{p+a}.\end{aligned}$$

De la même manière que pour l'exemple 1, on montre que $D_{\mathcal{L}} = \{p \in \mathbb{C} \text{ tel que } \operatorname{Re}(p) > -\operatorname{Re}(a)\}$.

Remarque. On retient donc les 3 résultats suivants :

$$\begin{aligned}f(t) = \mathcal{U}(t) &\Rightarrow \mathcal{L}_f(p) = \frac{1}{p} \\ f(t) = t\mathcal{U}(t) &\Rightarrow \mathcal{L}_f(p) = \frac{1}{p^2} \\ f(t) = e^{-at}\mathcal{U}(t) &\Rightarrow \mathcal{L}_f(p) = \frac{1}{p+a}\end{aligned}$$

Théorème. Soit $n \in \mathbb{N}$, la transformée de Laplace de $f(t) = t^n\mathcal{U}(t)$ est :

$$\mathcal{L}_f(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

Remarque. La preuve de la proposition précédente se fait par récurrence.

Exemple. Soit $f(t) = t^4 \mathcal{U}(t)$. Alors $\mathcal{L}_f(p) = \frac{4!}{p^5} = \frac{24}{p^5}$

6.3 Propriétés

6.3.1 Linéarité

Théorème. Soient f et g deux fonctions causales.

$$\mathcal{L}_{f+g}(p) = \mathcal{L}_f(p) + \mathcal{L}_g(p)$$

$$\mathcal{L}_{\lambda f}(p) = \lambda \mathcal{L}_f(p), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\lambda f+g}(p) &= \int_0^{+\infty} (\lambda f(t) + g(t)) e^{-pt} dt \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt + \int_0^{+\infty} g(t) e^{-pt} dt \\ &= \lambda \mathcal{L}_f(p) + \mathcal{L}_g(p) \end{aligned}$$

□

Exemples (A connaître!).

1. Soit $f(t) = (2t^3 - 3t^2 + t + 5)\mathcal{U}(t)$. On peut écrire : $f(t) = 2t^3\mathcal{U}(t) - 3t^2\mathcal{U}(t) + t\mathcal{U}(t) + 5\mathcal{U}(t)$.
On a alors

$$\mathcal{L}_f(p) = 2\frac{3!}{p^4} - 3\frac{2!}{p^3} + \frac{1}{p^2} + 5\frac{1}{p} = \frac{12}{p^4} - \frac{6}{p^3} + \frac{1}{p^2} + \frac{5}{p}$$

2. Soit $f(t) = \cos(\omega t)\mathcal{U}(t)$, alors $\mathcal{L}_f(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$.

En effet, par la formule d'Euler, on a : $f(t) = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})\mathcal{U}(t)$, et comme $\mathcal{L}_{e^{-at}\mathcal{U}(t)}(p) = \frac{1}{p+a}$,
on a :

$$\mathcal{L}_f(p) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p - i\omega} + \frac{1}{p + i\omega} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{2p}{p^2 + \omega^2} = \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

6.3.2 Multiplication par e^{-at}

Théorème. Soit f_0 une fonction causale et soit $a \in \mathbb{C}$.

$$\mathcal{L}_{f_0(t)e^{-at}} = \mathcal{L}_{f_0}(p + a)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{f_0(t)e^{-at}}(p) &= \int_0^{+\infty} f_0(t)e^{-at}e^{-pt}dt \\ &= \int_0^{+\infty} f_0(t)e^{-(p+a)t}dt \\ &= \mathcal{L}_{f_0}(p+a)\end{aligned}$$

□

Exemple.

Soit $f(t) = te^{-2t}\mathcal{U}(t)$. En posant $f_0(t) = t\mathcal{U}(t)$, on a $\mathcal{L}_{f_0}(p) = \frac{1}{p^2}$ et $f(t) = f_0(t)e^{-2t}$, donc

$$\mathcal{L}_f(p) = \mathcal{L}_{f_0}(p+2) = \frac{1}{(p+2)^2}$$

6.3.3 Dérivation temporelle

Théorème. Soit f une fonction causale dérivable.

$$\mathcal{L}_{f'}(p) = p\mathcal{L}_f(p) - f(0^+)$$

où $f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$.

Démonstration. On procède par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{f'}(p) &= \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt \\ &= [f(t)e^{-pt}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -pf(t)e^{-pt}dt \\ &= 0 - f(0^+) + p\mathcal{L}_f(p)\end{aligned}$$

□

Exemple (A connaître!).

Soit $f(t) = \sin(\omega t)\mathcal{U}(t)$, alors $\mathcal{L}_f(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$.

On a $f'(t) = \omega \cos(\omega t)\mathcal{U}(t)$ et $\mathcal{L}_{f'}(p) = \omega \times \frac{p}{p^2 + \omega^2}$, donc

$$\mathcal{L}_f(p) = \frac{1}{p} (\mathcal{L}_{f'}(p) + f(0^+)) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

puisque $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 0$.

6.3.4 Retard temporel

Théorème. Soit f_0 une fonction causale et soit $\tau \in \mathbb{R}_+$. On pose $f(t) = f_0(t - \tau)\mathcal{U}(t - \tau)$, alors :

$$\mathcal{L}_f(p) = \mathcal{L}_{f_0}(p)e^{-p\tau}$$

Démonstration. On pose le changement de variable $x = t - \tau$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{f_0(t-\tau)\mathcal{U}(t-\tau)}(p) &= \int_0^{+\infty} f_0(t - \tau)\mathcal{U}(t - \tau)e^{-pt} dt \\ &= \int_{\tau}^{+\infty} f_0(t - \tau)e^{-pt} dt \\ &= \int_0^{+\infty} f_0(x)e^{-p(x+\tau)} dx \\ &= \int_0^{+\infty} f_0(x)e^{-px}e^{-p\tau} dx \\ &= \mathcal{L}_{f_0}(p)e^{-p\tau}\end{aligned}$$

□

Exemple. Soit $f(t) = t\mathcal{U}(t - 2)$. On pose $f(t) = f_0(t - 2)$. On a alors :

$$f_0(t) = f(t + 2) = (t + 2)\mathcal{U}(t) = t\mathcal{U}(t) + 2\mathcal{U}(t)$$

d'où

$$\mathcal{L}_{f_0}(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{2}{p}$$

donc

$$\mathcal{L}_f(p) = e^{-2p} \left(\frac{1}{p^2} + \frac{2}{p} \right).$$

6.4 Transformée inverse

Définition (TRANSFORMÉE INVERSE).

Soit F la transformée de Laplace d'une fonction causale f . On a alors : $F(p) = \mathcal{L}_f(p)$. On appelle *transformée de Laplace inverse* de F , notée $\mathcal{L}_F^{-1}$ ou $\mathcal{L}^{-1}(F)$ la fonction f .

La transformée de Laplace d'une fonction étant unique, nous allons travailler par identification.

Exemples.

1. Soit $F(p) = \frac{p-1}{p^2+3p+2}$. En effectuant une D.E.S. on trouve :

$$F(p) = \frac{p-1}{(p+1)(p+2)} = \frac{-2}{p+1} + \frac{3}{p+2}$$

On reconnaît la transformée de Laplace de

$$f(t) = (-2e^{-t} + 3e^{-2t})\mathcal{U}(t).$$

2. Soit $F(p) = \frac{1}{p^2}e^{-3p}$. On pose $F_0(p) = \frac{1}{p^2}$. F_0 est la transformée de Laplace de $f_0(t) = t\mathcal{U}(t)$. La présence du terme e^{-3p} dans une transformée correspond à un retard de 3. On a donc

$$f(t) = f_0(t-3) = (t-3)\mathcal{U}(t-3).$$

3. Soit $F(p) = \frac{2}{p^2+4p+6}$. En utilisant la forme canonique, on trouve :

$$F(p) = \frac{2}{(p+2)^2+2} = F_0(p+2)$$

où $F_0(p) = \frac{2}{p^2+2}$. Or

$$F_0(p) = \frac{2}{p^2+2} = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{p^2+(\sqrt{2})^2}$$

On reconnaît la transformée de Laplace de $f_0(t) = \sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t)\mathcal{U}(t)$ et donc

$$f(t) = f_0(t)e^{-2t} = \sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t)e^{-2t}\mathcal{U}(t)$$

6.5 Application aux équations différentielles

Pour résoudre une équation différentielle de la forme :

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t) \quad (6.1)$$

où $a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$ et f est une fonction causale, une méthode consiste à :

1. appliquer la transformée de Laplace à l'équation (6.1)
2. déterminer $\mathcal{L}_y$, la transformée de Laplace de la solution y
3. appliquer la transformée inverse pour en déduire l'expression de y

Remarque. On utilise la propriété :

$$\mathcal{L}_{f'}(p) = p\mathcal{L}_f(p) - f(0^+)$$

On a également :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{f''}(p) &= p\mathcal{L}_{f'}(p) - f'(0^+) \\ &= p(p\mathcal{L}_f(p) - f(0^+)) - f'(0^+) \\ &= p^2\mathcal{L}_f(p) - pf(0^+) - f'(0^+) \end{aligned}$$

Exemple.

$$\begin{cases} y'' + 4y' - 5y = e^{2t}\mathcal{U}(t) & (E) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2 \end{cases}$$

On applique la transformée de Laplace. On obtient :

$$\begin{aligned} (E) &\Rightarrow \mathcal{L}_{y''}(p) + 4\mathcal{L}_{y'}(p) - 5\mathcal{L}_y = \mathcal{L}_{e^{2t}\mathcal{U}(t)}(p) \\ &\Rightarrow (p^2\mathcal{L}_y(p) - p - 2) + 4(p\mathcal{L}_y(p) - 1) - 5\mathcal{L}_y = \frac{1}{p-2} \\ &\Rightarrow \mathcal{L}_y(p) (p^2 + 4p - 5) = \frac{1}{p-2} + p + 6 = \frac{p^2 + 4p - 11}{p-2} \\ &\Rightarrow \mathcal{L}_y(p) = \frac{p^2 + 4p - 11}{(p-2)(p^2 + 4p - 5)} = \frac{p^2 + 4p - 11}{(p-2)(p-1)(p+5)} \\ &\Rightarrow \mathcal{L}_y(p) = \frac{1/7}{p-2} + \frac{1}{p-1} + \frac{-1/7}{p+5} \end{aligned}$$

On reconnaît la transformée de Laplace de :

$$y(t) = \left(\frac{1}{7}e^{2t} + e^t - \frac{1}{7}e^{-5t} \right) \mathcal{U}(t)$$

6.6 Formulaire

f	$\mathcal{L}_f(p)$
$\mathcal{U}(t)$	
$t\mathcal{U}(t)$	
$t^n\mathcal{U}(t)$ avec $n \in \mathbb{N}$	
$e^{-at}\mathcal{U}(t)$ avec $a \in \mathbb{C}$	
$\cos(\omega t)\mathcal{U}(t)$ avec $\omega \in \mathbb{R}^+$	
$\sin(\omega t)\mathcal{U}(t)$ avec $a \in \mathbb{R}^+$	

f	$\mathcal{L}_f(p)$
$\lambda f + g$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$	
$e^{-at}f_0(t)$ avec $a \in \mathbb{C}$	
$f'(t)$	
$f_0(t - \tau)$	

Chapitre 7

Suites numériques

7.1 Vocabulaire et notations

Définition (SUITE NUMÉRIQUE).

On appelle *suite numérique* une fonction définie sur $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto f(n) \end{aligned}$$

On note généralement :

$$\begin{aligned} u &: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto u_n \end{aligned}$$

et on dit que u_n est le n -ième terme de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Définition (SUITE EXPLICITE/RÉCURRENTE).

- On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *explicite*, si on a une expression de u_n en fonction de n :
 $u_n = f(n)$
- On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *récurrente* (d'ordre 1), si on a une expression de u_n en fonction du terme précédent : $u_n = f(u_{n-1})$

Exemple.

1. $u_n = 2n + 3$ est une suite explicite. Avec

$$u_0 = 2 \times 0 + 3 = 3 \quad u_1 = 2 \times 1 + 3 = 5 \quad u_2 = 2 \times 2 + 3 = 7$$

2. $u_n = 2^n + 3$ est une suite explicite. Avec

$$u_0 = 2^0 + 3 = 4 \quad u_1 = 2^1 + 3 = 5 \quad u_2 = 2^2 + 3 = 7$$

3. $u_{n+1} = 2u_n + 3$ avec $u_0 = 3$ est une suite récurrente. Avec

$$u_0 = 3 \quad u_1 = 2 \times u_0 + 3 = 9 \quad u_2 = 2 \times u_1 + 3 = 21$$

4. $u_{n+1} = 2^{u_n} + 3$ avec $u_0 = 3$ est une suite récurrente. Avec

$$u_0 = 3 \quad u_1 = 2^{u_0} + 3 = 11 \quad u_2 = 2^{u_1} + 3 = 2051$$

Définition (SUITE ARITHMÉTIQUE).

On appelle *suite arithmétique* de raison $r \in \mathbb{R}$ une suite qui vérifie $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n + r \quad (\text{forme récurrente}) \quad \text{ou} \quad u_n = u_0 + nr \quad (\text{forme explicite})$$

Exemple.

1. $u_{n+1} = u_n + 4$ est une suite arithmétique de raison $r = 4$
2. $u_{n+1} = 3 - 2n$ est une suite arithmétique de raison $r = -2$ et de premier terme $u_0 = 3$
3. $u_{n+1} = \frac{1}{3}n$ est une suite arithmétique de raison $r = \frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = 0$

Définition (SUITE GÉOMÉTRIQUE).

On appelle *suite géométrique* de raison $q \in \mathbb{R}$ une suite qui vérifie $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n \times q \quad (\text{forme récurrente}) \quad \text{ou} \quad u_n = u_0 \times q^n \quad (\text{forme explicite})$$

Exemple.

1. $u_{n+1} = 4u_n$ est une suite géométrique de raison $q = 4$
2. $u_{n+1} = 3 \times 2^n$ est une suite géométrique de raison $r = 2$ et de premier terme $u_0 = 3$
3. $u_{n+1} = \frac{1}{3^n}$ est une suite géométrique de raison $r = \frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = 1$

7.2 Limite d'une suite

Définition (SUITE CONVERGENTE/DIVERGENTE).

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est :

- *convergente* lorsque u_n admet une limite **finie** en $+\infty$, c'est à dire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = c$, où $c \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- *divergente* lorsque la suite n'est pas convergente.

Exemple.

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$ donc la suite $u_n = 2^n$ est divergente.
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{2}{n} = 1$ donc la suite $u_n = 1 - \frac{2}{n}$ est convergente.
3. La suite $u_n = (-1)^n$ n'admet pas de limite en $+\infty$ car elle oscille entre -1 et 1 . Cette suite est donc divergente.

Remarque.

Lorsqu'on étudie la convergence d'une suite, c'est toujours en $+\infty$! Faire tendre un nombre entier n vers 0 (ou tout autre valeur finie) n'a aucun sens.

Théorème.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r .

- Si $r = 0$ alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et converge vers u_0 .
- Si $r \neq 0$ alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

Théorème.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |q| < 1 \quad \text{ou} \quad u_0 = 0$$

Remarque.

Si $q \in \mathbb{R}$, $|q|$ désigne la valeur absolue de q . Si $q \in \mathbb{C}$, $|q|$ désigne le module de q .

Exemple.

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{300} \times (1,1)^n = +\infty$ car $q = 1,1 > 1$
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $q = \frac{1}{2} < 1$
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \times \left(-\frac{1}{5}\right)^n = 0$ car $|q| = \frac{1}{5} < 1$
4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{3}\right)^n = 0$ car $|q| = \frac{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}{3} = \frac{2}{3} < 1$
5. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{3n}}{3^{2n}} = 0$ car $\frac{2^{3n}}{3^{2n}} = \left(\frac{2^3}{3^2}\right)^n$ d'où $|q| = \frac{8}{9} < 1$

7.3 Somme des termes d'une suite

Définition.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite et soit $N \in \mathbb{N}^*$. On note $\sum_{n=1}^N u_n$ la somme des N premiers termes de la suite :

$$\sum_{n=1}^N u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_N$$

Remarque.

Dans certains cas, la somme ne commencera pas à l'indice 1. La somme des termes d'indices compris entre n_0 et N se note $\sum_{n=n_0}^N u_n$.

Exemple.

1. $\sum_{n=1}^5 n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$
2. $\sum_{n=1}^4 2^n = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4$

Théorème.

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites.

- $\sum_{n=1}^N (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^N a_n + \sum_{n=1}^N b_n$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^N (\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=1}^N a_n$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^N \lambda = \lambda N$

Théorème.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique. On a :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_N = \sum_{k=0}^N u_k = (u_0 + u_N) \times \frac{N+1}{2}$$

et plus généralement

$$\sum_{k=n_0}^N u_k = (u_{n_0} + u_N) \times \frac{N - n_0 + 1}{2}$$

Remarque.

Il ne faut pas retenir ces formules mais plutôt :

Somme des termes d'une suite arithmétique = (premier terme + dernier terme) $\times \frac{\text{nombre de termes}}{2}$

Exemple.

1. $\sum_{k=0}^{31} -4k = (0 - 124) \times \frac{32}{2} = -1984$
2. $\sum_{k=2}^{16} 3 + 2k = (7 + 35) \times \frac{16 - 2 + 1}{2} = 315$

Théorème.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q . On a :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_N = \sum_{k=0}^N u_k = u_0 \times \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$$

et plus généralement

$$\sum_{k=n_0}^N u_k = u_{n_0} \times \frac{1 - q^{N-n_0+1}}{1 - q}$$

Remarque.

Il ne faut pas retenir ces formules mais plutôt :

$$\text{Somme des termes d'une suite géométrique} = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

Exemple.

$$\sum_{k=0}^{31} 3 \times 2^k = 3 \times \frac{1 - 2^{32}}{1 - 2} = 3(2^{32} - 1)$$