

Mathématiques - Devoir Surveillé 1

Vendredi 3 octobre 2025 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1

1. Déterminer la raison des suites géométriques suivantes :

(a) $U_n = (-2)^{3n+1} = -2 \times ((-2)^3)^n$ Donc la raison $q = -8$.

(b) $U_n = 3e^{i\pi n} = 3 \times (e^{i\pi})^n$. Donc la raison $q = e^{i\pi} = -1$.

(c) $u_n = \frac{4^{\frac{n}{2}}}{2^{2n}} = \frac{\sqrt{4}^n}{(2^2)^n} = \frac{2^n}{4^n}$. Donc la raison $q = \frac{1}{2}$.

2. Déterminer la limite des suites suivantes.

(a) $U_{n+1} = 3 \times U_n$ avec $U_0 = 0.1$.

La suite est géométrique de raison $q = 3 > 1$ et de 1er terme positif donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$.

(b) $u_n = \frac{4^{\frac{n}{2}}}{2^{2n}}$. La suite est géométrique de raison $q = \frac{1}{2} \in]-1; 1[$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$.

(c) $U_n = \frac{e^n \times \ln(n)}{n^2}$. La limite de la suite donne une forme indéterminée de type $\frac{\infty}{\infty}$. Par croissances comparées le comportement asymptotique de la suite est donné par e^n . Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$.

(d) $U_n = \left(\frac{5}{\sqrt{26}}\right)^{-n}$. La suite est géométrique de raison $q = \frac{\sqrt{26}}{5} > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$.

3. Calculer les sommes suivantes (donner la valeur exacte sous forme de fraction irréductible)

(a) $\sum_{n=1}^6 \frac{1}{16 \times 2^{-2n}} = \sum_{n=1}^6 \frac{1}{16} \times 4^n = \frac{4}{16} \times \frac{1-4^6}{1-4} = \frac{1}{4} \times \frac{-4095}{-3} = \frac{4095}{12}$

(b) $\sum_{k=1}^{19} \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{19+2} - \frac{1}{1+1}$ par télescopage. Donc la somme vaut $\frac{1}{21} - \frac{1}{2} = \frac{-19}{42}$.

Exercice 2

Donner la nature (convergente ou divergente) des séries suivantes en justifiant votre réponse.

1. $\sum n \ln(n)$. La suite $U_n = n \ln(n)$ ne tend pas vers 0 (puisqu'elle tend vers $+\infty$). Donc la série diverge.

2. $\sum \frac{3}{\sqrt{5n}}$. La suite $U_n = \frac{3}{\sqrt{5n}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{n}}$. Or $\sum \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ diverge d'après Riemann.

3. $\sum \frac{n^2 + 3n + 1}{2n^4 + n^2 + 1}$

La suite $U_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^2}{2n^4} = \frac{1}{2n^2}$. Or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge d'après Riemann.

Donc la série converge par équivalence.

4. $\sum \frac{\sin(n) + 1}{3^n}$

On sait que, pour tout entier n : $0 \leq \sin(n) + 1 \leq 2$.

Donc, pour tout entier n : $0 \leq U_n \leq \frac{2}{3^n}$.

Or la série $\sum \frac{2}{3^n}$ converge car c'est une série géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

Donc la série converge par comparaison.

5. $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

On a $U_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sin(1)}{\sqrt{n}}$.

Or $\sum \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ diverge d'après Riemann.

Donc la série diverge aussi par équivalence.

Exercice 3

1. Déterminer la nature de l'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{2t+1}{t^2(t+1)} dt$.

On a $\frac{2t+1}{t^2(t+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2t}{t^3}$. Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge d'après Riemann. Donc I converge aussi par équivalence.

2. Déterminer la décomposition en éléments simples de $f(t) = \frac{2t+1}{t^2(t+1)}$.

La forme de la DES est $f(t) = \frac{a}{t} + \frac{b}{t^2} + \frac{c}{t+1}$.

Pour calculer b , on multiplie f par t^2 puis on remplace t par 0. On obtient $b = 1$.

Pour calculer c , on multiplie f par $t+1$ puis on remplace t par -1. On obtient $c = -1$.

Pour calculer a , on multiplie f par t puis on fait tendre t vers $+\infty$. On obtient $a+c=0$ donc $a=1$.

Ainsi

$$f(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{-1}{t+1}$$

3. Calculer l'intégrale I .

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{+\infty} \frac{2t+1}{t^2(t+1)} dt \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{-1}{t+1} dt \\ &= \left[\ln|t| - \frac{1}{t} - \ln|t+1| \right]_1^{+\infty} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln(t) - \frac{1}{t} - \ln(t+1) - (-1 - \ln(2)) \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{t}{t+1}\right) - \frac{1}{t} + 1 + \ln(2) \\ &= \ln(1) - 0 + 1 + \ln(2) = 1 + \ln(2) \end{aligned}$$

Exercice 4 Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \int_0^1 \frac{t^3 + t^2 + t - 2}{t^2 + 1} dt = \int_0^1 t + 1 - \frac{3}{t^2 + 1} dt$ par division euclidienne.

$$\text{Donc } I_1 = \left[\frac{1}{2}t^2 + t - 3 \arctan(t) \right]_0^1 = \frac{1}{2} + 1 - 3 \arctan(1) = \frac{3}{2} - \frac{3\pi}{4}.$$

2. $I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(3t) \cos(5t) dt$. Il faut linéariser.

On peut montrer (à l'aide des formules d'Euler ou des formules de trigonométrie) que

$$\cos(3t) \cos(5t) = \frac{1}{2}(\cos(8t) + \cos(2t))$$

Donc

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(8t) + \cos(2t) dt \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{8} \sin(8t) + \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_{-\pi}^{\pi} \\
 &= \frac{1}{16} (\sin(8\pi) - \sin(-8\pi)) + \frac{1}{4} (\sin(2\pi) - \sin(-2\pi)) = 0
 \end{aligned}$$

3. $I_3 = \int_{-1}^0 t^2 e^{\frac{t}{2}} dt$. Il faut faire 2 intégrations par parties (I.P.P) :

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \int_{-1}^0 t^2 e^{\frac{t}{2}} dt \\
 &= \left[2t^2 e^{\frac{t}{2}} \right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 4t e^{\frac{t}{2}} dt \\
 &= \left[2t^2 e^{\frac{t}{2}} \right]_{-1}^0 - \left[8t e^{\frac{t}{2}} \right]_{-1}^0 + \int_{-1}^0 8e^{\frac{t}{2}} dt \\
 &= \left[2t^2 e^{\frac{t}{2}} \right]_{-1}^0 - \left[8t e^{\frac{t}{2}} \right]_{-1}^0 + \left[16e^{\frac{t}{2}} \right]_{-1}^0 \\
 &= 0 - 2e^{-\frac{1}{2}} - 0 - 8e^{-\frac{1}{2}} + 16 - 16e^{-\frac{1}{2}} = 16 - 26e^{-\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

4. $I_4 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin\left(x + \frac{t}{2}\right) dt$. On intègre par rapport à t , donc on considère x comme une constante.

$$\begin{aligned}
 I_4 &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin\left(x + \frac{t}{2}\right) dt \\
 &= \left[-2 \cos\left(x + \frac{t}{2}\right) \right]_{-\pi}^{\pi} \\
 &= -2 \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\
 &= 2 \sin(x) + 2 \sin(x) \\
 &= 4 \sin(x)
 \end{aligned}$$

Remarque : la fonction n'est pas impaire puisque c'est un sinus avec un déphasage de x .

5. $I_5 = \int_1^e \frac{1}{x(\ln(x) + 2)} dx$ en utilisant le changement de variables $x = e^t$.

On remarque que $x = e^t \Leftrightarrow t = \ln(x)$.

Donc quand x varie entre 1 et e , alors t varie entre 0 et 1.

De plus, on peut montrer que $x = e^t \Rightarrow dx = e^t dt$.

Donc

$$I_5 = \int_0^1 \frac{1}{e^t(t+2)} e^t dt = \int_0^1 \frac{1}{t+2} dt = [\ln|t+2|]_0^1 = \ln(3) - \ln(2)$$

6. $I_6 = \int_{-3}^5 f(t) dt$ où f est la fonction 2-périodique telle que $f(t) = t$ sur $]0; 2]$.

Comme la fonction est de période 2 et que l'intervalle est de longueur 8, on peut faire 4 fois l'intégrale sur $[0; 2]$:

$$I_6 = 4 \times \int_0^2 t dt = 8$$