

Mathématiques - Devoir Surveillé 1

Vendredi 3 octobre 2025 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1

1. Déterminer la raison des suites géométriques suivantes :

$$(a) \ U_n = (-2)^{3n+1}, \quad (b) \ U_n = 3e^{i\pi n}, \quad (c) \ u_n = \frac{4^{\frac{n}{2}}}{2^{2n}}.$$

2. Déterminer la limite des suites suivantes.

$$(a) \ U_{n+1} = 3 \times U_n \text{ avec } U_0 = 0.1 \quad (c) \ U_n = \frac{e^n \times \ln(n)}{n^2}$$
$$(b) \ u_n = \frac{4^{\frac{n}{2}}}{2^{2n}}. \quad (d) \ U_n = \left(\frac{5}{\sqrt{26}} \right)^{-n}$$

3. Calculer les sommes suivantes (donner la valeur exacte sous forme de fraction irréductible)

$$(a) \ \sum_{k=1}^6 \frac{1}{16 \times 2^{-2n}} \quad (b) \ \sum_{k=1}^{19} \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}.$$

Exercice 2

Donner la nature (convergente ou divergente) des séries suivantes en justifiant votre réponse.

1. $\sum n \ln(n)$
2. $\sum \frac{3}{\sqrt{5n}}$
3. $\sum \frac{n^2 + 3n + 1}{2n^4 + n^2 + 1}$
4. $\sum \frac{\sin(n) + 1}{3^n}$
5. $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \left(1 + \frac{1}{n} \right)$

Exercice 3

1. Déterminer la nature de l'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{2t+1}{t^2(t+1)} dt$
2. Déterminer la décomposition en éléments simples de $f(t) = \frac{2t+1}{t^2(t+1)}$.
3. Calculer l'intégrale I .

Exercice 4 Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \int_0^1 \frac{t^3 + t^2 + t - 2}{t^2 + 1} dt$
2. $I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(3t) \cos(5t) dt$
3. $I_3 = \int_{-1}^0 t^2 e^{\frac{t}{2}} dt$
4. $I_4 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin\left(x + \frac{t}{2}\right) dt$
5. $I_5 = \int_1^e \frac{1}{x(\ln(x) + 2)} dx$ en utilisant le changement de variables $x = e^t$
6. $I_6 = \int_{-3}^5 f(t) dt$ où f est la fonction 2-périodique telle que $f(t) = t$ sur $]0; 2]$.